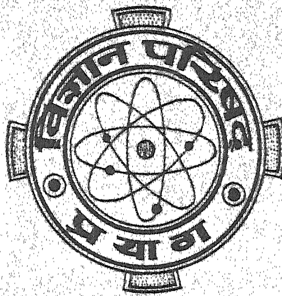
ISSN : 0505 - 5806

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

The Research Journal of the Hindi Science Academy

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika

Vol. 44 January 2001 No.1



कौंसिल ऑफ साइंस एण्ड टेक्नलॉजी, उत्तर प्रदेश तथा कौंसिल ऑफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च, नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित

विज्ञान परिषद् प्रयाग

महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-211002

विषय-सूची

Vol. 44 January 2001 No.1

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 44, No. 1, January 2001.

पौधों के रोग : उनका सामाजिक और आर्थिक प्रभाव

कामेश्वर सहाय भार्गव
अवकाशप्राप्त प्रोफेसर एवं अध्यक्ष, वनस्पति विज्ञान विभाग
गोरखपुर विश्वविद्यालय, गोरखपुर (उ० प्र०)*

सारांश

यह निर्विवाद सत्य है कि मानव अपनी अविवेकपूर्ण गतिविधियों के द्वारा पर्यावरण को विषाक्त बनाता जा रहा है। कार्बन डाइऑक्साइड, कार्बन मोनो ऑसाइड, मीथेन और अन्य ज़हरीली गैसों के ट्रोपोस्फीयर में बनने के कारण पादपों के साधारण स्वास्थ्य और वृद्धि पर प्रतिकूल या घातक प्रभाव पड़ता है। इससे पौधे कमज़ोर होकर रोगों के लिए संवेदनशील बन जाते हैं।

पादपों में रोग उत्पन्न करने वाले कारक प्रकृति में आदिकाल से ही पाये जाते रहे हैं, किन्तु जब वातावरण रोगों के संवर्धन और फैलाव के अनुकूल हो तो उनके द्वारा उत्पन्न रोग महामारी का रूप धारण कर लेते हैं।

प्रस्तुत समीक्षात्मक निबन्ध में प्राचीन और वर्तमान के स्थायी और देशान्तरगामी कुछेक रोगों का विवेचन किया गया है। साथ ही मनुष्य के ऊपर इन रोगों के क्या प्रभाव पड़े हैं, इनके कारण मनुष्य को अकाल और देशान्तरण जैसी किन-किन आपदाओं का सामना करना पड़ा है इस पर विस्तार से चर्चा की गई है।

Abstract

Plant diseases : Their social and economic impacts. *By* K. S. Bhargava, Retd. Prof. & Head, Department of Botany, University of Gorakhpur, Gorakhpur (U.P.).

It is undisputed truth that man himself is responsible for making the environment poisonous. Gases like carbon di-oxide, carbon monoxide, methane etc. are being continuously formed in the atmosphere and this has badly affected the health of plants. The plants became weak and prone to diseases.

---

* वर्तमान पता : **C-16,** निराला नगर, लखनऊ, (उ० प्र०)

Disease causing agents have been found in Nature since ancient times, but when the atmosphere is favourable for culture and expansion of diseases then the diseases take up the form of epidemics.

In the present review, some of the diseases have been discussed in detail, which are ancient or new and travel form one country to the other and at the same time, their effects on man and the hazards man has to face.

प्रकृति का यह नियम है कि पर्यावरण में जीवित और निर्जीव तत्वों का संतुलन प्राकृतिक शक्तियों द्वारा बना रहे। यह तभी सम्भव होता है जब प्रकृति अथवा मनुष्य द्वारा उत्पादित पदार्थ पर्यावरण में बढ़ते चले जाते हैं और इसको दूषित करते हैं।

प्रकृति प्रायः मनुष्य की आवश्यकताओं को बड़ी उदारता से पूरा करती है। महात्मा गांधी ने एक बार कहा था, 'संसार में मनुष्य की आवश्यकताओं के लिये पर्याप्त सामग्री है परन्तु उसकी लिप्सा के लिये नहीं।' यह एक शाश्वत सत्य है, क्योंकि बजाय इसके कि मनुष्य आवश्यकताओं को नियंत्रण में रखे और जिस संसार में वह रह रहा है अपने आपको उसके अनुकूल बनाये, वह अपनी क्षमता पर घमंड करने लगा। जिस वातावरण मे वह रहता है उसको वह अपनी बढ़ती हुई आवश्यकताओं के अनुरूप बदलने लगा। ऐसी-ऐसी औद्योगिक इकाइयाँ स्थापित करने लगा जिसके अवशेष स्थाई होते हैं और वातावरण में आ जाने पर अनिश्चित काल तक पड़े रहते हैं। इनका विनाश प्राकृतिक साधन जैसे सूर्य, वायु और जल द्वारा नहीं होता और परिणामस्वरूप प्राकृतिक वातावरण दूषित होने लगा। इस औद्योगिक सक्रियता तथा जंगलों की कटाई द्वारा कई गैसें जैसे कार्बन डाइऑक्साइड, कार्बन मोनोक्सॉइड, मीथेन और अन्य विषैले पदार्थ ट्रोपोस्फियर (troposphere) में बनते हैं जिनसे पौधों के साधारण स्वास्थ्य और वृद्धि पर बड़ा घातक अथवा प्रतिकूल प्रभाव पड़ता है। यह प्रतिबल या तो पौधों को क्षति पहुँचाता है या उनको कमज़ोर और रोगों के लिये संवेदनशील बना देता है।

पौधों के रोगजनक आदिकाल से ही प्रकृति में पाय जाते रहे हैं, परन्तु जब ऐसा वातावरण हो जाता है जो उनके संवर्धन और फैलाव के अनुकूल हो तो उनके द्वारा उत्पन्न रोग महामारी का रूप धारण कर लेते हैं।

यहाँ पर पौधों के प्राचीन और वर्तमान के स्थायी और देशान्तरगामी कुछ रोगों का विवेचन किया गया है और यह बताने का प्रयास किया गया है कि उनका मानव जीवन पर क्या प्रभाव पड़ा और इन रोगों के कारण मनुष्य को अकाल और देशान्तरण जैसी किन-किन आपदाओं का सामना करना पड़ा?

आरम्भिक सभ्यताएँ

रोगों द्वारा फ़सलों के नष्ट होने का विवरण बहुत ही प्राचीन और ऐतिहासिक अभिलेखों में

मिलता है। यह अभिलेख हज़ारों साल पुराने हैं। लोग रोगों से हमेशा डरते हैं। प्रायः रोग अन्धविश्वास, धार्मिक तथा तात्कालिक या जादुई विश्वासों का मिश्रण रहे हैं। कुछ विश्वासों का कोई व्यावहारिक महत्व नहीं है, परन्तु कुछ ऐसे हैं जिनको मानना ही पड़ता है।

भारतवर्ष के पुराने ग्रंथों में 'अंगमारी' और 'आसिता' रोगों का उल्लेख है (**विनय पात्रिका** 10 : 1.6)। **अथर्ववेद** में पौधों के स्वास्थ्य की रक्षा, रोगों से बचाव और उपचार के नियम दिये गये हैं– जैसे उनको धूम में रखना, तेल, घी, दूध, गाय के मूत्र और पौधों के सार से उपचार करना। उसमें रोगों के यथार्थ वर्णन तो नहीं मिलते हैं परन्तु उनके अवरुद्ध होने, मुरझाने और पुष्पों के निरोध होने के उल्लेख अवश्य हैं। **वृहत् संहिता** में वृक्षायुर्वेद पर एक अध्याय है जिसमें हेतु विज्ञान (etiology), रोगों के निदान और उपचार वर्णित हैं। किन्तु इन लेखों में किसी जादुई और आलौकिक शक्ति का आभास नहीं मिलता।

पेरू (दक्षिण अमेरिका) में टिटिका झील के पास रहने वाले अयामारू आदिवासियों को पौधों के रोगों की जानकारी थी। उनका विश्वास था, कि पौधों के रोग सूर्य के चारों ओर हलके प्रकाश कुण्डल, चन्द्रमा की कुछ कलाओं, सूखा, ओले, बिजली, अधिक आर्द्रता, कोहरा, पाला, ओस और घोड़े की लीद या गाय-भैसों के गोबर की खाद द्वारा होते हैं। किसी खेत में ऐसे समय जब ओस पड़ी हो, पशुओं की भोगलिप्सा अवस्था में आना गर्भवती और रजोधर्मी स्त्रियों, तथा शराब पिये मनुष्यों का आना पौधों में रोग लगने में सहायक होते हैं। अयामारू अपनी फ़सलों पर राख छिड़कते, उस पर मछली का पानी फुहारे से डालते और कीटों के प्रतिकर्षी एक पौधे 'मुना' *(Minthostachys sp.)* की शाखाएँ फ़सल के पौधों के बीच में डालते तथा अवांछित रोगी-पौधों को निकालते रहते थे। रोगों के नियंत्रण के लिये वे बीजों का वरण और सस्य-चक्र या फ़सलों के हेर-फेर की प्रणाली को अपनाते थे। जिस समय चन्द्रमा पूर्ण हो या सूर्य के चारों ओर प्रकाश-चक्र हो उस समय बुवाई नहीं करते। इनमें से कई प्रणालियाँ रोग आयतन और उग्रता को कम करती हैं, परन्तु यह भी सही है कि ये प्रणालियाँ अलाभदायक हैं तथा निष्कर्षों का मिश्रण हैं।

हिब्रू जाति के लोग 'धर्म्म पुस्तक' **बाइबल** (Bible) के पुराने नियम (Old Testament) में गेहूँ के 'किट्ट रोग' का उल्लेख करते हैं।

'उत्पत्ति' (Genesis) नामक पुस्तक में फिरौन (Pharaoh) के स्वप्न का इस प्रकार उल्लेख है :

41 : 22 "फिर मैंने दूसरा स्पप्न देखा। एक ही डंठल में सात अच्छी-अच्छी और अन्न से भरी हुई बालें निकलीं।"

41 : 23 "फिर मैं देखता हूँ, कि उनके पीछे और सात बालें छूछी-छूछी पतली और पुरवाई से मुरझाई हुई निकलीं।"

41 : 24 "इन पतली बालों ने उन सात अच्छी बालों को निगल लिया। इसे मैंने ज्योतिषियों को बताया, पर इसका समझनहारा कोई नहीं मिला।"

उस समय मिस्र राज्य में ज्ञानी और दक्ष लोगों की तुलना में जादूगर लोगों को चमत्कारिक और रहस्यपूर्ण घटनाओं का अधिक जानकार माना जाता था, परन्तु इस समय वे भी गड़बड़ा गये और अपने को लाचार मानने लगे। उन्होंने फिरौन को बताया कि यूसुफ (Josehp) नाम का हिब्रू इस स्वप्न की व्याख्या कर सकेगा। यूसुफ राजा के सामने लाये गये तो यूसुफ ने कहा– ''व्याख्या तो प्रभू की ओर से ही आयेगी। परमात्मा ही फिरौन को शांति का उत्तर देगा।'' उस युवक ने राजा को बताया कि स्पप्न ने भविष्यवाणी की है कि सात वर्ष बहुतायत के होंगे जिसमें फ़सल पर्याप्त और उपजाऊ शक्ति रखने वाली होगी। उसके बाद सात वर्ष सर्वनाशी अकाल के होंगे जो दरिद्रता, यातना और मृत्यु के सूचक होंगे। और फिर ऐसा ही हुआ।

इसके पश्चात् व्यवस्था विवरण (Deuteronomy) में उल्लेख है :

''तुमने मेरा त्याग किया है'' ऐसा इस्त्रायल के गुनाहों का निचोड़ था जिससे बाइबल (प्रतिश्रव) की पहली विधि का उल्लंघन हुआ और फिर विधान हुआ जिसमें ऐसे शाप और वरदान मिलेः

28 : 22 ''प्रभु तुमको क्षय रोग, ज्वर, दाह, बड़ी जलन, तलवार, झुलसा (blight) और किट्ट रोग (rust) से मारेगा। उस समय तक तेरा पीछा किये रहेंगे, जब तक तेरा सत्यानाश नहीं हो जायेगा।''

मोजेज (Moses) ने इस्त्रायल के सामने प्रमुख माँग प्रभु को समर्पण करने की रखी और फिर दूसरी माँग बाइबल में लिखे जीवन की। **राजा की पहली पुस्तक** (Book of King I) में ऐसा कहा है :

8 : 37-38 " जब इस देश में अकाल या भुखमरी या झुलसा रोग हो या किट्ट रोग या टिड्डियाँ या कीड़े हों या उनके शत्रु उनके देश के 'फाटकों' में उन्हें घेर रखें, अथवा कोई विपत्ति या रोग क्यों न हो, तब यदि कोई मनुष्य या तेरी प्रजा इस्त्रायल में अपने-अपने मन का दुःख जान ले, और गिड़गिड़ाते हुए एवं प्रार्थना करके अपने हाथ इस भवन की ओर फैलाएँ।''

इतिहास II (Chroincles II) में इस प्रकार का वर्णन हैः

6 : 28 ''जब इस देश में अकाल या महामारी या झुलसा हो या किट्ट रोग या टिड्डियाँ या कीड़े लगें, या उनके शत्रु उनके देश के 'फाटकों' में उन्हें घेर रखें, या कोई विपत्ति या रोग हो;''

6 : 31 ''कि वे जितने दिन इस देश में रहें, जिसे तूने उनके पुरखों को दिया था, उतने दिन तक तेरा भय मानते हुए तेरे मार्गों पर चलते रहें।''

इस तरह कई प्रकार की महामारियाँ पाप या अपराध के कारण बताई जाती थीं। परन्तु

सॉलोमन (Solomon) ने माना कि पहली आवश्यकता इन घृणात्मक प्राणियों का हटाना नहीं बल्कि पाप को क्षमा करना है या पाप से छूटना है।

हालाँकि परमात्मा ने इस्रायलियों के व्यवहार और आचरण की बार-बार निन्दा की परन्तु कोई बदलाव नहीं आया। फलस्वरूप दण्ड तो अनिवार्य था।

पैगम्बर आमोस (Amos) ने 760 बी.सी. में भविष्यवाणी की :

4 : 9 ''मैंने तुमको लू और किट्ट रोग से मारा है; और जब तुम्हारी वाटिकाएँ और दाख की बारियाँ, और अंजीर और जलपाई के वृक्ष बहुत हो गये तब टिड्डियाँ उन्हें खा गईं: तब भी तुम मेरी ओर फिर कर नहीं आये, प्रभु की यही वाणी है।''

इसी प्रकार हागै (Haggai) ने 520 बी.सी. में भविष्यवाणी की :

2 :17 "मैंने तुम्हारी सारी खेती को लू और किट्ट रोग और ओलों से मारा, तो भी तुम मेरी ओर न फिरे, प्रभु की यही वाणी है।''

जैसी पैगम्बर आमोस ने भविष्यवाणी की थी, प्रभु ने अपने जनसाधारण के खेत और वाटिकाओं को अधिक सूखे और अधिक नमी (जो कवक की वृद्धि के लिये उपयुक्त है) के परिणामस्वरूप 'झुलसा रोग' से दण्डित किया। जो इनसे बच गये उनको ओलों से नष्ट किया। ऐसा लगा कि सारी प्रकृति उनके विरुद्ध कर दी गई थी। ''इतना होने पर भी तुम मेरी ओर नहीं आये'' ऐसा विवरण मिलता है। ईश्वर की यह अप्रसन्नता उनके सुधरने के लिये काफी चेतावनी होनी चाहिये थी, परन्तु उस समय के लोग इसको समझने या अनुभव करने में बड़े सुस्त थे और पश्चाताप करके ईश्वर की ओर नहीं आये।

इस प्रकार हम देखते हैं कि फ़सलों का रोगों द्वारा नष्ट होना तथा अपने जीवन की आवश्यकताओं की पूर्ति के लिये ईश्वर की सर्वोच्चता तथा उस पर पूर्ण आश्रय का अभाव लोगों पर लादा जाता था और कहा जाता था कि उसकी अवज्ञा एक बड़ी महामारी लावेगी।

गेहूँ के किट्ट रोग (rust) द्वारा फ़सलों के नष्ट होने तथा अकाल पड़ने से इस्राइल के वासियों का मिस्र में देशान्तरण हुआ। इसके पश्चात् मिस्रियों में इस्रायल के लिये द्वेष पनपा और इस्रायलियों को मिस्र से निष्क्रमण (exodus) करना पड़ा अन्ततः इन सब ने पुराने इस्रायल के वासियों में उनके नैतिक आचरण को प्रभावित किया।

जलवायुविज्ञों का पूर्ण विश्वास है कि उस समय गेहूँ में किट्ट रोग फैलने के लिये परिस्थितियाँ बड़ी अनुकूल थीं और उस विशेष युग में इसके कारण अकाल पड़ा, इसके ठोस प्रमाण हैं।

रोम के निवासियों को किट्ट रोग द्वारा गेहूँ की फ़सल नष्ट होने से काफी कष्ट था और उन्होंने गेहूँ के किट्ट रोग के बारे में 700 बी. सी. में उल्लेख किया है। उन्होंने एक काल्पनिक कथा के

अनुसार गेहूँ के किट्ट रोग की उत्पत्ति का दोष एक बारह वर्ष के लड़के को दिया। ऐसा कहा जाता है कि उस लड़के ने अपने पिता के मुर्गी के बाड़े में एक लोमड़ी पकड़ी। उसकी दुम पर सूखी घास बाँध कर आग लगा दी और उसको जंगल में छोड़ दिया। रोबिगस देवता (Robigus) इस अनियमित परपीड़न से बहुत रुष्ट हुआ और उसने उस देश के वासियों को उनके प्रमुख अनाज की फ़सल में रोग फैला कर पीड़ित किया। किट्ट रोग द्वारा गेहूँ की पत्तियाँ लाल-भूरे रंग की हो जाती हैं (जैसे कि वह आग से जल गई हों) और यह उस लड़के की क्रूरता की याद बराबर दिलाती रही। यह अवश्य है कि उस समय किट्ट रोग का असली कारण नहीं मालूम था, परन्तु ऐसा प्रबल प्रमाण है कि वह **पक्सिनिया** कवक *(Puccina)* द्वारा हुआ था। जिस रोबिगस देवता ने रोमन लोगों को उनके प्रमुख अनाज में रोग फैला कर दण्डित किया था, उसको तुष्ट करने के लिये रोमन लोग रोबीगोलिया उत्सव हर वर्ष 25 अप्रैल को रोम से 5 मील की दूरी पर मानने लगे जिसमें एक पीले कुत्ते की बलि दी जाती थी। वहाँ रोमन लोग इस प्रकार प्रार्थना करते थे; हे कठोर रोबिगो ! हमारे अनाज की वनस्पति पर रहम करो। हम प्रार्थना करते हैं कि अपने कठोर हाथ को रोको।'' इससे प्रत्यक्ष रूप से प्रतीत होता है कि गेहूँ के किट्ट रोग से पुराने रोमवासियों पर एक निश्चित सांस्कृतिक प्रभाव पड़ा।

2000 वर्ष पहले एथेन्स (Athens) में भूमि की उत्पादन क्षमता के रख रखाव पर बहस हो रही थी। पहली शताब्दी के एक रोमन कृषक कौल्युमेला (Calumella) ने कहा था कि उस समय के समस्त कृषि भूमि का उर्वरता-हरण किसी सामग्री की कमी के कारण होता था जो उस समय की खेती सम्बन्धी स्थिति से सम्बन्ध रखता था। वर्तमान भूमि रोगजनकों की जानकारी द्वारा स्पष्ट होता है कि ''भूमि का उर्वरता-हरण'' उसकी स्रोत सामग्री के नष्ट होने से नहीं वरन् भूमि में पाये जाने वाले रोगजनक, विशेषकर पादप परजीवी सूत्रकृमियों (Plant Parasitic nematodes) द्वारा होता है। उस समय भूमि की बढ़ती हुई क्रमिक उर्वरता-हरण से देश से एक बड़ी संख्या में देशान्तरण हुआ और यह रोमन साम्राज्य के गिरने का एक सहायक घटक समझा जाता है।

सातवीं शताब्दी में दक्षिण अमेरिका में माया लोगों के एक पूरे राष्ट्र की जनता का स्थानान्तरण ग्वाटेमाला (Guatemala) से उत्तरी युकाटन (Yucatan) हुआ जिससे उनको अपनी संस्कृति, घर बार और महलों की निधि वहीं छोड़नी पड़ी। यह समझा जाता है कि पादप परजीवी सूत्रकृमियों द्वारा भूमि की उर्वरता-हरण होने से अकाल के कारण ऐसा हुआ। यह धारणा इस तथ्य पर आधारित है कि माया लोगों द्वारा लगाई गई फ़सलें परजीवी सूत्रकृमियों द्वारा ग्रहणशील हैं। यह सूत्रकृमि उष्णकटिबंध और उपोष्ण जलवायु में वितरित होते हैं और ऐसे पर्यावरण में इनकी संख्या बढ़ती है। ऐसा कोई ठोस प्रमाण नहीं मिला है जिससे यह सिद्ध हो सके कि यह सूत्रकृमि रोग के पतन या माया लोगों के स्थानान्तरण के कारक बने परन्तु इस अवस्था के लिये इनका अवश्य ही बड़ा हाथ है।

पन्द्रहवीं शताब्दी के अन्त और सोलहवीं शताब्दी के प्रारंभ में युकाटन (Yucatan) और कुइनटाना रो((Quintana Ro) शहरों से माया लोगों का लोप होना, वहाँ की मक्का फ़सल, जो उनका प्रधान

आहार था, उस का एक बड़े पैमाने पर 'मक्का कुण्ठ' (Corn stunt) रोग द्वारा बिल्कुल नष्ट हो जाना था। इस रोग की जानकारी अभी हुई है कि यह रोग **स्पाइरोप्लाज़्मा कुन्केलाई** *(Spiroplasma kunkeli)* द्वारा उत्पन्न होता है। माया जनसमुदाय की आहार के अभाव में इतनी बड़ी संख्या में मृत्यु ही माया सभ्यता के विनाश का कारण थी और इसके कारण स्पेनवासियों को अमेरिका पर विजय प्राप्त करने में सहायता मिली।

पौधों के रोगों का देश की अर्थव्यवस्था और इतिहास पर प्रभाव

उन्नीसवीं शताब्दी
(1790-1845 ई०)

'आडू पीतन' (Peach yellows) एक विषाणु रोग है जो फिलेडेलफिया प्रदेश में अठारहवीं शताब्दी के अन्तिम दशक में प्रत्यक्ष हुआ और संयुक्त राज्य अमेरिका के समस्त उत्तर-पूर्वी क्षेत्र में फैल गया तथा मिशिगन तक पहुँच गया। मिशिगन में आडू फ़सल नष्ट हो गई और गाँवों में विषाद और दिवालियापन फैल गया। उन्नीसवीं शताब्दी में न्यूजर्सी प्रदेश में सर्वाधिक हानि हुई। न्यूजर्सी और न्यूबर्ग क्षेत्र में इसकी खेती बन्द करनी पड़ी और वहाँ के निवासियों को विशेष हानि उठानी पड़ी।

1845-46 ई०

ये वर्ष मनुष्य जाति की आपदाओं में एक विशेष महत्व रखते हैं। प्राचीन और वर्तमान काल में पौधों के किसी भी रोग ने अपनी ओर इतना ध्यान आकर्षित नहीं किया जितना कि एक कवक **फाइटोफ्थोरा इन्फेस्टेन्स** *(Phytophthora infestans)* से उत्पन्न आलू (Potato) के विलंबित अंगमारी (Late blight) महामारी ने किया। यह रोग पहली बार बेलजियम में कूर्तराय (Courtrai) क्षेत्र के समीप देखा गया। उसी वर्ष (1845) की जुलाई के मध्य में समस्त फ्लैन्डर्स (Flanders) तथा इंग्लैण्ड और फ्रांस से लगे जनपद भी प्रभावित हो गये थे। शीघ्र ही यह रोग स्विटजरलैण्ड में फैल गया और अगस्त के महीने में पेरिस भी पहुँच गया। इसी महीने में यह रोग जर्मनी, उत्तर-दक्षिणी फ्रांस और दक्षिणी इंग्लैण्ड में पाया गया। आयरलैण्ड में यह रोग पहली बार 6 सितम्बर को दिखाई दिया, परन्तु आरंभ में इस रोग को कोई महत्व नहीं दिया गया। अक्टूबर महीने में फ़सल कटाई के समय जब लोगों ने देखा कि अधिकतर आलू सड़ गये हैं तो उन्हें एक प्रकार का त्रास हुआ। आयरलैण्ड में इस महामारी का प्रभाव अनुमान से बाहर था।

1845 में आयरलैण्ड की जनसंख्या लगभग 80 लाख थी। इनमें से 60 लाख लोगों के लिये आलू आधा या आधे से भी अधिक आवश्यक आहार था और शेष आबादी के लिये आलू ही एक मात्र खाद्य सामग्री थी। ये केवल इसी पर जीते थे। आलू की फ़सल नष्ट होने से आयरलैण्ड में उस समय अकाल पड़ गया और व्यापक भुखमरी हो गई। उस समय कितने मनुष्य मरे और कितनों का स्थानान्तरण हुआ, इसके आँकड़ों में मतभेद है। परन्तु इतना अवश्य मालूम है कि 1841 में वहाँ की जो जनसंख्या 81,75, 124 थी वह 1851 में कम होकर 65,52, 385 हो गई। सम्भवतः

ऐसा अनुमान है कि 10 लाख लोग भूख और रोगों के द्वारा मारे गये और 10 लाख उत्तरी अमेरिका और ब्रिटेन चले गये। इस रोग के कारण आयरलैंड के स्वरूप और राजनीति पर बड़ा प्रभाव पड़ा और लोगों को एक ही प्रकार की फ़सल पर निर्भर रहने की निरर्थकता को भुगतना पड़ा।

आयरलैण्ड की एक छोटी सी पत्रिका में छपा एक समाचार उस समय की विकट और दर्दनाक स्थिति के दृश्य को इस प्रकार दर्शाता है :

> ''किंग स्ट्रीट की कार्क पेटेन्स सा मिल, जो अपने देश में अपने प्रकार की एक बड़ी मिल है, पिछले 6-8 महीने से 24 घंटे काम करते हुए 16-20 आरों द्वारा शव रखने वाले बक्सों (Coffins) के लिये तख़्ते चीरती रही है।'' इससे अनुमान लगया जा सकता है कि वहाँ मृत लोगों की संख्या कितनी होगी?

संयुक्त राज्य अमेरिका के एक अध्यापक द्वारा सुनाई गई एक कथा इस संदर्भ में बड़ी मार्मिक है। जिस समय श्री जे. एफ. केनेडी (J. F. Kennedy) वहाँ राष्ट्रपति थे, वह अध्यापक अपने शिष्यों को आलू का यह रोग पढ़ाते हुए उसका ऐतिहासिक महत्व समझाता था। उसका कहना था,

> ''मैं अपने शिष्यों को बताता हूँ कि यदि आलू का यह रोग आयरलैंड में नहीं हुआ होता तो राष्ट्रपति केनेडी के परदादा आरयरलैण्ड से अमेरिका नहीं आते और वह (राष्ट्रपति केनेडी) स्वयं इस समय सम्भवतः वहीं एक छप्पर की कुटिया के बाहर मिट्टी के एक पाइप से धूम्रपान करते होते।''

1850-1892 ई०

हेमिलिया वेस्टाट्रिक्स *(Hemileia vastatrix)* द्वारा उत्पन्न कहवे का किट्ट रोग पहली बार 1850 ई० में श्रीलंका में दिखाई पड़ा और 1875 ई० तक भीषण अनुपात में फैल गया। 1892 ई० तक यह रोग सारे द्वीप में फैल गया और वहाँ कहवे के सब वृक्ष नष्ट हो गये। इतिहास में ऐसी घोर विपत्ति के कम ही उदाहरण मिलते हैं। यह विपत्ति देश की अर्थव्यवस्था को एक ही फ़सल पर निर्भर रखने से हुई तथा रोग का इतिहास किसानों की लापरवाही और अज्ञानता को भी दर्शाता है। इस रोग के कारण की खोज में इतना विलम्ब हुआ कि श्रीलंका का कहवा उद्योग बच नहीं पाया और वहाँ के रहने वालों को आर्थिक सर्वनाश का सामना करना पड़ा। भाग्यवश देश और उसके निवासियों के लिये एक दूसरी फ़सल चाय मिल गई, जिसने कहवे का स्थान ले लिया और जो वहाँ की जलवायु में खूब फली-फूली। चाय की खेती बढ़ने से श्रीलंका कहवा पैदा करने वाले देश से चाय पैदा करने वाला देश बन गया।

1851 ई०

फ्रांस के अंगूर के खेतों में **अनसिनुला निकेटर** *(Uncinula necator)* कवक द्वारा उत्पन्न अंगूरों के चूर्णिल आसिता (Powdery mildew) रोग ने अत्यधिक हानि पहुँचाई और वहाँ 1851 से 1854 के बीच शराब का उत्पादन औसत से एक चौथाई हो गया और शराब उद्योग को ठप कर दिया।

1852 ई० में एटलांटिक समुद्र स्थित मेडियारा द्वीपसमूह (Madeira islands) में अंगूर की खेती बन्द करनी पड़ी और वहाँ नारंगी के पेड़ लगाये गये। आजकल वहाँ की अर्थव्यवस्था गन्ने और केले पर निर्भर है तथा अब कुछेक स्थानों पर अंगूर भी लगाया जाता है।

1878 से 1882 ई०

फ्रांस में एक कवक **प्लाज़मोपेरा विटिकोला** *(Plasmopara viticola)* द्वारा उत्पन्न मृदुरोमिल आसिता (downy mildew) रोग ने अंगूर की खेती को बहुत हानि पहुँचाई जिससे फ्रांस के शराब उद्योग को अत्यंत संकट का सामना करना पड़ा।

बीसवीं शताब्दी

लगभग 1900 ई० में क्यूबा में एम एल ओ रोगजनक (MLO) द्वारा उत्पन्न घातक पीतन (lethal yellowing) रोग ने प्रायः समस्त नारियल के पेड़ों का सर्वनाश कर दिया जिससे वहाँ के छोटे क्षेत्र के मालिकों को अत्यधिक हानि और कष्ट का सामना करना पड़ा। इस रोग के कारण वे नारियल की लाभदायक खेती करने में असमर्थ हो गये और उनको अपनी ज़मीन बड़े मालिकों के हाथ बेचनी पड़ी।

उन लोगों ने छोटे-छोटे क्षेत्रों का मिला कर बड़े बगान बनाये जिनमें वे गन्ने की खेती करने लगे। कुछ ही वर्षों में गन्ने के खेतिहर बहुत मालदार हो गये और छोटे-छोटे किसान बहुत ही गरीब। दोनों की आर्थिक स्थिति में बड़ा अन्तर हो गया जिससे वहाँ की सामाजिक पद्धति में क्रान्ति की सम्भावना बढ़ी।

1904 ई०

एन्डोथिया पैरासिटिका (*Endothia parasitica*) नामक कवक ने 1904 ई० में पूर्वी देशों से अचानक संयुक्त राज्य अमेरिका में प्रवेश किया और 1908 ई० में 'चेस्टनट अंगमारी' (Chestnut blight) रोग ने न्यूयार्क के आसपास के क्षेत्रों में हज़ारों वृक्षों को नष्ट कर दिया। वहाँ के मूल चेस्टनट अपने प्राकृतिक क्षेत्र से लगभग लुप्त हो गये। यह रोग बढ़ता ही गया और 1925 ई० तक इस रोग ने इलिनोय प्रान्त के चेस्टनट वृक्षों का बिलकुल ही सफाया कर दिया।

1916-1917 ई०

इस काल में **फाइटोफ्थोरा इन्फेस्टेन्स** (*Phytophthora infestans*) द्वारा उत्पन्न आलुओं की विलंबित अंगमारी (Late blight) जर्मनी में व्यापक भुखमरी का कारण हुई।

1916-1917 ई० में **पक्सिनिया ग्रेमिनिस** (*Puccinia graminis*) द्वारा उत्पन्न गेहूँ की किट्ट की महामारी से संयुक्त राज्य अमेरिका और कैनेडा में लाखों टन गेहूँ नष्ट हो गया। दोनों क्षेत्रों के लोगों को "बिना गेहूँ" के दिन गुज़ारने पड़े और उनको चावल और मक्के की रोटी पर गुज़र करनी पड़ी।

1920 ई०

इस वर्ष गन्ने के मोज़ेक रोग (किर्मीर - **mosaic**) ने सारे विश्व में गन्ने की पुरानी प्रजातियों को प्रभावित किया और गन्ने का उत्पादन 400,000 टन से कम होकर 50, 000 टन रह गया। इस रोग से निबटने के लिये पुरानी प्रजातियों के स्थान पर गन्ने की सहनशील प्रजातियाँ लगाई गईं। 1920-27 के बीच मोज़ेक महामारी ने संयुक्त राज्य अमेरिका में 30 प्रतिशत क्षति पहुँचाई और इसके साथ-साथ जड़ों के गलन रोग (root rot) ने भी विशेष हानि पहुँचाई जिससे अनेक बड़े खेतिहर बरबाद हो गये और वहाँ के चीनी उद्योग को बिल्कुल दिवालियेपन के कगार पर पहुँचा दिया।

1921 ई०

इस वर्ष आस्ट्रेलिया के न्यूसाउथेवल्ज़ और क्वीन्ज़लैण्ड राज्यों में एक विषाणु रोग गुच्छित चूड़ (bunchy top) ने केले के उद्यानों का सफाया कर दिया और दोनों राज्यों में केले के उद्योग को नष्ट कर दिया।

1924-26 ई०

हॉप (Hop=*Hulnulus lupulus*) की फ़सल में **स्युडोपेरोनोस्पोरा ह्युम्युलाई** (*Pseudoperenospora humuli*) कवक द्वारा उत्पन्न मृदुरोमिल आसिता (downy mildew) रोग ने मध्य योरोप में तहलका मचा दिया। इंग्लैण्ड के हॉप बगीचों के अतिरिक्त बेलज़ियम, फ्रांस, चेकोस्लोवेकिया, यूगोस्लो-विया और जर्मनी के अनेक क्षेत्र भी इससे प्रभावित हुए। इसके द्वारा इतनी हानि हुई कि लोगों को हॉप उगाने वाले बगीचों को छोड़ना पड़ा। हैबरटन नामक क्षेत्र में तो उत्पादन केवल 25 प्रतिशत के लभग हुआ जिससे कम से कम 3 करोड़ मार्क की हानि हुई।

1926-27 ई०

क्लेविसेप्स परप्यूरिया *(Claviceps purpurea)* कवक द्वारा उत्पन्न राई के अरगट (erget of rye) से दूषित अनाज खाने से सितम्बर 1926 और अक्टूबर 1927 के बीच रूस साम्राज्य में ग्यारह हज़ार लोगों की मृत्यु हो गई।

1930 ई०

माइकोस्फैरेला म्यूजीकोला *(Mycosphaerella musicola)* कवक द्वारा उत्पन्न केले के सिगाटोका रोग (Sigatoka) ने मध्य और दक्षिण अमेरिका में केले के उद्योग को विनाश के कगार पर खड़ा कर दिया।

इसी वर्ष संयुक्त राज्य अमेरिका में फर्नीचर के लिये लाये गये एल्म (elm) लकड़ी के बोटों पर लगे हुए एक कवक **सेराटोसिस्टिस अलमाई** (*Ceratocystis ulmi*) द्वारा डच एल्म रोग (Dutch

elm disease) का उदय हुआ। यह रोग इससे पहले संयुक्त राज्य अमेरिका मे नहीं पाया जाता था। इसने इस देश के दो-तिहाई पूर्वी क्षेत्र और कैनेडा में लाखों एल्म के पेड़ों को नष्ट कर दिया और यह रोग पश्चिम और दक्षिण की ओर बढ़ता गया।

1935 ई०

गेहूँ के किट्ट रोग की दूसरी महामारी जो 1916 ई० से भी बदतर थी, संयुक्त राज्य अमेरिका के कुछ भागों में भीषण रूप से प्रकट हुई। मिन्नेसोटा और डकोटा राज्य गेहूँ उत्पादन के बड़े क्षेत्र हैं। वहाँ कि किसानों को बड़ी क्षति का सामना करना पड़ा, जिससे वे दिवालिये हो गये। इसके पश्चात् फिर 1937-38 ई० में अमेरिका, रूस, कैनेडा, अफ्रीका, इंग्लैंड, इटली और स्वीडेन में भी पर्याप्त हानि हुई।

1936-1946 ई०

कोको (Cocoa) का शून प्ररोह (swollen shoot) रोग एक विषाणु द्वारा होता है। अफ्रीका के घाना (Ghana) देश में 1936-37 ई० में कोको की उपज 116, 000 टन थी जब कि 1945-46 में इस रोग के कारण 64, 000 टन रह गई। इसके फलस्वरूप संसार भर में कोको के मूल्य पर बड़ा प्रभाव पड़ा और यह बड़ी ही महँगी हो गई। इस रोग की रोकथाम के लिये घाना में 40 लाख वृक्षों को काट देना पड़ा।

1953 ई०

एक सूत्रकृमि **रैडोफोलस सिमिलिस** (*Radopholus similis*) द्वारा हरी मिर्च के पीतन रोग ने इन्डोनेशिया में मिर्च के उद्योग को नष्ट कर दिया। यहाँ के बनका द्वीप में 22 लाख पौधों में से केवल 10 प्रतिशत बचे, शेष सब नष्ट हो गये जिससे वहाँ के किसानों को अपार आर्थिक संकट का सामना करना पड़ा।

1960 ई०

इस वर्ष एक जीवाणु **स्युडोमोनस सोलेनेसियेरम** *(Pseudomonas solanacearum)* द्वारा मोको (Moko) रोग की महामारी ने मध्य अमेरिका में केलों का सर्वनाश कर दिया।

1969-70 ई०

हेलमिन्थोस्पोरियम मेडिस प्रजाति I (*Helminthosporium maydis race* I) कवक द्वारा मक्के के अंगमारी रोग ने संयुक्त राज्य अमेरिका में मक्के की खेती के क्षेत्र में तबाही मचा दी।

1974-75 ई०

इस बार कई वर्षों पश्चात् **हेमिलिया वेस्टेट्रिक्स** (*Hemileia vastatrix*) द्वारा कहवे के किट्ट रोग ने ब्राज़ील में अत्यधिक हानि पहुँचाई।

भारत में स्थिति

भारतवर्ष में भी लोगों को 1938-39 से ऐसी विपत्तियों का सामना करना पड़ा है और इस शताब्दी में पौधों की कई भयंकर महामारियाँ देखने को मिलीं।

1938-39 ई०

फाइसेलोस्पोरा टुक्युमैनेन्सिस (*Physalospora tucumanensis*) कवक द्वारा गन्ने का लाल विगलन रोग उत्तर भारत में गन्ना उगाने वाले क्षेत्रों में (विशेषकर उत्तर प्रदेश और बिहार) दूर-दूर तक फैला जिससे गन्ने की फ़सल नष्ट हो गई और चीनी का उद्योग संकट में पड़ गया, क्योंकि मिलें अपनी सामान्य क्षमता से केवल 33 प्रतिशत गन्ना ही पेर सकीं। इस कारण छोटे-छोटे किसानों को भारी यातनाएँ भोगनी पड़ीं और उनको असीम आर्थिक क्षति पहुँची।

1942 ई०

यह वर्ष बंगाल के इतिहास में भुलाया नहीं जा सकता है। **हेल्मिन्थोस्पोरियम ओराइजी** (*Helminthosporium oryzae*) कवक द्वारा पर्ण बिन्दु (leaf spot) रोग से बंगाल और आस-पास के क्षेत्रों में धान की 90 प्रतिशत फ़सल नष्ट हो गई जो बंगाल में 1942 ई. में कलंकित अकाल का मुख्य कारक बनी। इस भुखमरी से लाखों व्यक्तियों की जानें गईं और अंततः शासन को भी पौधों के रोगों की ओर ध्यान देना पड़ा।

1946-47 ई०

इस वर्ष **पक्सिनिया ग्रैमिनिस ट्रिटिसाई** *(Puccinia graminis tritici)* द्वारा उत्पन्न प्ररोह किट्ट रोग की महामारी से गेहूँ की फ़सल बरबाद हो गई और मध्य प्रदेश में खाने और बीज के लिये गेहूँ की अत्यधिक कमी पड़ गई।

1951 ई० **जैन्थोमोनस ओराइजी** *(xanthomonas oryzae)* द्वारा जीवाणु अंगमारी रोग से बम्बई प्रदेश में धान की फसल को बड़ी क्षति पहुँची।

1958-59 ई०

बाजरे **पेनिसिटम टाइफाइडिस** (*Pennisetum typhoides*) की नई अधिक उपजाऊ संकर प्रजातियों में **क्लेविसेप्स माइक्रोसेफेला** (*Claviceps microcephala*) कवक द्वारा उत्पन्न अरगट (Ergot) ने सम्पूर्ण भारत में फ़सल को क्षति पहुँचाई और इसके द्वारा मिलावट से दूषित दाने खाने से पशुओं और मनुष्य को विषाक्त किया।

1963-66 ई०

प्रारंभ में बिहार और फिर सारे देश में धान के जीवाणु अंगमारी रोग ने धान की फ़सल को नष्ट-भ्रष्ट कर दिया।

पौधों के रोग और लोगों के पीने और खाने की आदतों में परिवर्तन

श्रीलंका में कहवे के किट्ट रोग ने इंग्लैंड में बड़ा सामाजिक परिवर्तन किया। बारहवीं शताब्दी के आरंभ में कहवे के भुने दाने इंग्लैंड में अरब देशों से काफी बड़ी-बड़ी दर पर आयात होते थे। भारत में 1600 ई० के लगभग कहवे के पेड़ लगाये गये तथा इसके पश्चात् डच लोग कुछ पौधे श्रीलंका ले गये जहाँ उनके उद्यान बहुत फूले-फूले। नेपोलियन की हार के पश्चात् अंग्रेज़ों ने 1825 ई० में श्रीलंका में कहवे के नये वृक्ष लगाये और 1870 ई० तक श्रीलंका प्रत्येक वर्ष 100 लाख पाउण्ड कहवा निर्यात करने लगा, जिसका मूल्य भी बहुत सस्ता था। उस समय श्रीलंका इंग्लैंड के अधीन था और वहाँ अधिक सुविधा थी इसलिये यह पेय इंग्लैंड में काफी लोकप्रिय हो गया।

1875-1892 ई० के बीच कहवे के उद्यान क्षेत्र किट्ट रोग द्वारा क्षतिग्रस्त होने लगे और इस रोग द्वारा हानि के कारण कहवे के उत्पादन में बहुत कमी हो गई और बड़ा मँहगा हो गया। इस रोग की उस समय रोकथाम नहीं हो सकी इसलिये अंग्रेज़ों ने वहाँ कहवे के बजाय चाय की खेती आरंभ की जो भाग्यवश बड़ी सफल रही। श्रीलंका से कहवे की महँगाई के अनुपात में चाय बड़ी सस्ती मिलने लगी और यह बड़ी लोकप्रिय हो गई। इस प्रकार इस रोग द्वारा एक राष्ट्र के लोगों की जीने की आदत में बड़ा बदलाव आया और अंग्रेज़ लोग कहवा-पियक्कड़ों के बजाय चाय-पियक्कड़ हो गये।

संयुक्त राज्य अमेरिका के आदि उपनिवेशियों ने पाया कि दक्षिण में गेहूँ की फ़सल किट्ट रोग द्वारा दूषित हो जाती है परन्तु उत्तरी क्षेत्र में नहीं। इस रोग के कारण उत्तरी भाग में गेहूँ की रोटी खाई जाती है जबकि दक्षिण के लोगों को गेहूँ अधिक मात्रा में न मिलने के कारण मक्के की रोटी खानी पड़ती थी। यही हाल योरोप में भी था। इंग्लैंड और इटली में गेहूँ अच्छा उगता था और उन लोगों को गेहूँ की रोटी मिलती थी जबकि मध्य योरोप में किट्ट रोग लगने से गेहूँ कम मात्रा में मिलता था इसलिये वहाँ के लोगों को एक निम्न प्रकार के खाद्यान्न राई (rye) की रोटी खानी पड़ती थी।

पौधों के रोग और मनुष्य द्वारा बनाये गए क़ानून

(अ) कानून का विधिकरण (अधिनियमन) : गेहूँ के किट्ट रोग ने मनुष्य को बाध्य किया कि वह ऐसी कार्यवाही करे कि कानून के द्वारा उसको नियमित तौर से भोजन मिलता रहे। यह विशेषकर बड़ा रोचक है क्योंकि यह काम गेहूँ के किट्ट रोग के कारणों की जानकारी न होते हुए भी 200 वर्ष पूर्व ऐसा किया गया।

फ्रांस में खेतिहरों ने गेहूँ के किट्ट रोग और किलमोड़ा (पहाड़ी क्षेत्र का एक पौधा बारबेरी -Barberry) के पौधों की निकट उपस्थिति में परस्पर एक संबंध पाया क्योंकि जहाँ-जहाँ किलोमाड़ा के पौधे गेहूँ की फ़सल के निकट होते थे, उनमें किट्ट रोग लग जाता था। खेतिहर जो गेहूँ उगाते थे उनको यह नहीं मालूम था कि किलमोड़ा क्यों घातक है परन्तु यह अवश्य जानते थे कि यह

कितना घातक है। यह सुन-सुन कर उस समय के वनस्पतिशास्त्री इन लोगों का उपहास करते थे, परन्तु खेतिहार अपने विचारों में दृढ़ थे।

1660 ई० में फ्रांस के रूएन (Rouen) क्षेत्र में किलमोड़ा को नष्ट करने का कानून पास हुआ। इसके पश्चात् जर्मनी में 1815 ई० में, फ्रांस के अन्य क्षेत्रों में 1888 ई० में, डेनमार्क में 1869 ई० में, ऑस्ट्रिया में 1882 ई० में, नार्वे में 1916 ई० और हंगरी में 1920 ई. में क़ानून अधिनियमित हुए। इंग्लैंड में यह काम कानून के द्वारा न होकर स्वैच्छिक सहयोग से सम्पन्न हुआ।

संयुक्त राज्य अमेरिका में इस सम्बन्ध में सबसे पहले कनेक्टीकट (1726 ई.), मैसेच्युसेट्स (1755 ई.), रोड आइलैण्ड (1766 ई.) और फिर दूसरे प्रान्तों में क़ानून बने। कनेक्टीकट में गेहूँ के खेतों के पास किलमोड़ा का नाश करने के लिए जो क़ानून 1726 ई० में बना उसमें विधान मंडल ने क़ानून की अवहेलना करने वालों के लिये 20 शिलिंग का जुर्माना रखा और यदि फिर भी वे किलमोड़े को नष्ट न करें तो उनको 10 शिलिंग प्रति माह का जुर्माना देना पड़ेगा।

इन क़ानूनों द्वारा लोगों के दृष्टिकोण में निश्चित रूप से परिवर्तन आया और वैज्ञानिक अनुसंधान की गति बढ़ी। वैज्ञानिक डी बेरी (de Bary) ने 150 वर्ष बाद 1865 में सिद्ध किया कि गेहूँ किट्ट रोग के कवक को अपना जीवन-चक्र पूरा करने के लिये दो पोषक, किलमोड़ा और गेहूँ के पौधे साझीदार हैं।

(ब) क़ानून का निरस्तीकरण : यह विचित्र विडम्बना है कि जहाँ एक ओर गेहूँ के किट्ट रोग के कारण एक क़ानून अधिनियमित हुआ, आलू के अंगमारी रोग ने वहीं एक क़ानून के निरस्तीकरण करवाने में सहायता की।

अभिलेखों से पता चलता है कि इंग्लैंड में 'अनाज कानून'' (Corn laws) बारहवीं शताब्दी में लगा दिये गये थे। अठारहवीं शताब्दी के उत्तरार्ध और उन्नीसवीं शताब्दी के पूर्वार्ध में इन क़ानूनों का बड़ा राजनैतिक महत्व हो गया था। 1815 ई० में एक क़ानून बना जिसके द्वारा आयात किए जाने वाले अनाज पर बहुत अधिक कर लगा दिया गया जिससे घरेलू गेहूँ की कीमत में गिरावट न आये और बड़े-बड़े मालिकों के हित में घरेलू कृषि को कोई हानि न हो। इन 'अनाज क़ानूनों' ने इंग्लैंड के ग़रीब और श्रमिक लोगों पर बड़ा बोझ डाल दिया था और इसी के कारण मानचेस्टर में 1835 ई० में एक 'अनाज क़ानून-विरोधी संघ' बन गया। यह संघ उद्योग सम्बन्धी मध्यवर्ग के लोगों को जमीनदारों के खिलाफ़ जुटाने लगा परन्तु बहुत सफलता नहीं मिली। अंत में सब के नेता उस समय के प्रधानमंत्री सर रॉबर्ट पील को प्रभावित करने में सफल हो गये। संयोगवश उसी समय 1845-46 ई० में आलू के अंगमारी रोग ने एक बहुत बड़ी आबादी के प्रमुख आहार (आलू) की फ़सल को नष्ट कर दिया। इस रोग की वजह से खाद्य पदार्थ न मिलने के कारण करोड़ों लोगों की मृत्यु हो गई और जो लोग बच गये उनको बड़े कष्ट भोगने पड़े। इस स्थिति के कारण प्रधानमंत्री को ''अनाज क़ानून'' की क्रूरता पर विश्वास हो गया और वह ब्रिटिश संसद में 1846 ई० में कुप्रसिद्ध अनाज क़ानूनों का निरस्तीकरण कराने में सफल हुए। इस निरस्तीकरण ने इंग्लैंड में व्यापार

की शुरुआत की और यह उस समय के ब्रिटिश साम्राज्य के इतिहास की सबसे महत्वपूर्ण और उल्लेखनीय घटना थी।

इस प्रकार देखते हैं कि जहाँ गेहूँ के किट्ट रोग ने एक रोग सहायक (किलमोड़ा या बारबेरी) के विरुद्ध विधिनिर्माण कराया वहाँ आलू अंगमारी रोग ने सामाजिक सुधार (अनाज क़ानून का निरस्तीकरण) की दिशा महत्वपूर्ण भूमिका निभाई।

पौधों के रोग और ईसाई धर्म (सम्प्रदाय) की शक्ति

उत्तरी योरोप और कुछ और क्षेत्रों में किट्ट रोग के कारण गेहूँ नहीं उगा सकते थे और इस कारण राई *(Secale cereale)* की व्यापक खेती की जाती थी। यह एक सस्ता अनाज भी था। **क्लेविसेप्स परप्यूरिया** *(Claviceps purpurea)* द्वारा उत्पन्न एक रोग राई में प्रायः हो जाता था जिससे उसके दाने दूषित हो जाते थे। ऐसे क्षेत्र जहाँ अधिकतर राई की रोटी खाते थे वहाँ के लोग अनजाने में अरगट से दूषित आटे का प्रयोग करते थे। इसकी विषाक्तता से मतली, दस्त, अल्प ताप, क्षीण नाड़ी, आँख की पुतली का विवर्धन, एक प्रकार की मिरगी का विकार तथा तेज़ ज्वर हो जाता था। उन दिनों यह ''देवप्रिय'' (Sacred) या ''पवित्र ताप'' (Holy Fire) कहलाता था। इस रोग की पहली महामारी का उल्लेख 857 ई० में फ्रांस में मिलता है। 1037 ई० में गास्टन डी ला वेलौयर (Gaston de la Valloire) नामक एक फ्रांसीसी ने ''पवित्र ताप'' से आहत व्यक्तियों के लिये एक चिकित्सालय खोल कर उसे सेन्ट एन्थोनी (St. Anthony) को समर्पित किया और वहाँ उसके अवशेष रखे। जो व्यक्ति इस रोग से आहत व्यक्तियों की सेवा करते थे वे 'सेन्ट एन्थोनी वर्ग' के अनुक्रम बन गये और उन्होंने ऐसे चिकित्सालय फ्रांस के प्रत्येक भाग में बनाए। इन चिकित्सालयों में इलाज के लिये आये बीमारों को राई की रोटी की बजाय गेहूँ की रोटी दी जाती थी और क्योंकि गेहूँ में अरगट की मिलावट नहीं होती थी, बीमारी का दर्द धीरे-धीरे कम हो जाता था और वे स्वस्थ हो जाते थे। बीमारी से उनका निरोग होना मठाधीशों के माध्यम से सेंट एन्थोनी की मध्यस्थता द्वारा बताया जाता था जिससे लोगों को धर्म या चर्च (Church) की शक्ति में विश्वास हो गया। इसके पश्चात् यह रोग सेन्ट एन्थोनी ताप (St. Anthony's Fire) के नाम से जाना जाता रहा।

1630 ई० में फ्रांसीसी चिकित्सक डॉ० थ्युलिये (Dr. Thuillier) ने प्रमाणित किया कि 'सेन्ट एन्थोनी ताप' अरगट में दूषित राई के दाने खाने से होता है परन्तु उस समय वह किसानों को इसका विश्वास न दिला सका और यह रोग फैलता गया। 1777 ई० में सोलोग्न में इस रोग की महामारी हुई और एक फ्रांसीसी एब्बे टेसिये (Abbe Tessier) ने इस रोग का असली कारण मालूम किया। उसने अनेक पशुओं पर प्रयोग किया और उनको अरगट से दूषित आटा खिलाकर जो लक्षण इसके द्वारा मनुष्यों में होते थे, पशुओं में वही लक्षण पुनरुत्पादित करने में सफलता पाई। धीरे-धीरे विचार बदलते गये और इस ताप को अरगोटिज्म रोग (Ergotism) का नाम दिया गया। परिणामस्वरूप अठारहवीं शताब्दी में यह रोग कम होने लगा परन्तु कुछ अज्ञानवश और कुछ लापरवाही के कारण उन्नीसवीं शताब्दी में कभी-कभी व्यग्र रूप धारण कर लेता था।

एक बड़ी रोचक बात है कि 1951 ई० में फ्रांस के पोन-सा-एस्परी (Pont-Saint Esprit) नामक एक गाँव में एक असाधारण रहस्यमय रोग उत्पन्न हुआ। लोगों को विश्वास हो गया कि उनके बदन में कोई प्रेतात्मा घुस गई और उस समय बहुत से लोग मर भी गये। चिकित्सक लोग भी इस रहस्यमय रोग से घबड़ा गये, क्योंकि उन्होंने यह नहीं सोचा था कि इतनी जागृति होने पर भी लोग ऐसा आटा काम में ला सकते हैं। वास्तव में यह बहुत देर में पता चला कि यह रोग उन लोगों को हुआ जिन्होंने अरगट से दूषित आटा खाया था।

पौधों का रोग और औद्योगिक शोषण

ट्यूलिप (Tulip) हालैण्ड (Holland, the Netherlands) का राष्ट्रीय पुष्प है। नई गाँठों से उत्पन्न ट्यूलिप के पुष्प मूल के समरूप होते हैं और स्वस्थ ट्यूलिप के पुष्प का रंग एकसमान होता है। लाल, पीला, नारंगी या प्रारंभिक काश्तकारों ने देखा कि कभी-कभी पौधे के कद समान रंग वाली पंखड़ियों की बजाय अकस्मात् एक विचित्र और विलक्षण प्रकार के चितकबरे, रंगीन छप-छपे और धारीदार पंखड़ी वाले पुष्प देने लगे। इस क्रिया को रंग का फटना (colour break) कहा जाता है। ऐसे पुष्प जनता को अधिक पसन्द आने लगे और इनको अधिक सुन्दर और आकर्षण समझा जाने लगा। ऐसे कृन्तक (clones) भिन्न-भिन्न नामों से बिकने लगे और इनके दाम भी बहुत लगने लगे। जिन काश्तकारों के पास इस प्रकार के कन्द थे उनको इस प्रकार के पुष्पों के उत्पन्न होने का कारण नहीं मालूम था। वे इनको एक रक्षित रहस्य (guarded secret) के समान रखने लगे। शीघ्र ही उन्होंने साधारण रंग के पुष्प देने वाले कन्द को चितकबरे पुष्प देने वाले कन्द पर कलम करना भी सीख लिया।

उस समय ऐसे पुष्प पाने की ऐसी झक सवार हो गई थी कि लोगों ने इसको ट्यूलिपोमेनिया (Tulipomania) का नाम दे दिया था। शौकीन लोग जो बहुत अमीर थे ऐसे असाधारण नमूनों को अत्यधिक दोमों में खरीदने लगे और 1634-1637 ई० में तो ट्यूलिप की सट्टेबाज़ी इतनी हास्यास्पद हो गई कि सारा देश विनाश के कगार पर पहुँच गया। सट्टेबाज़ कन्दों को, जब वे पृथ्वी में नीचे ही होते थे, खरीदने और बेचने लगे। यहाँ तक कि लोग अपने मकान तक गिरवी रखने और बेचने लगे। साथ-साथ अपना व्यवसाय, अपने गहने यहाँ तक कि श्रमिक वर्ग अपने उपकरण भी ऐसे कन्द लेने के लिये गिरवी रख कर सट्टा करने लगे जिससे वे समृद्धिशाली हो जायें। ऐसी स्थिति होने पर सरकार ने सट्टेबाज़ी रोकने के लिये क़दम उठाया, जिससे ट्यूलिप व्यवसाय विचारवान मालियों और काश्तकारों के हाथों में आया। यहाँ यह बताना उचित होगा कि उन दिनों सेम्पर ऑगस्टस (Semper augustus) नाम के ट्यूलिप का एक कन्द 4,6000 डॉलर के बराबर दाम में बिका।

इस शताब्दी के प्रारंभिक दिनों में वैज्ञानिकों ने अनुसंधान करके पाया कि ट्यूलिप के पुष्पों में रंग का फटना एक विषाणु द्वारा होता है और चितकबरे पुष्प एक विषाणु संक्रमण द्वारा होते हैं। आजकल अधिकतर ट्यूलिप स्वस्थ निरोग पौधों के वंशज हैं और फ़सल में से रोगी कन्दों को अलग कर दिया जाता है।

इस प्रकार हम देखते हैं कि पौधों के रोगों ने स्मरणातीत काल से ही मनुष्य के काम में आने वाली फ़सलों को अनेक बार हानि पहुँचाई है जिससे उनकी मानसिक और आर्थिक स्थिति काफी प्रभावित हुई। पादप रोग वैज्ञानिकों का कर्तव्य है कि रोगों पर अनुसन्धान कर उनको नियंत्रित करने के ऐसे उपाय खोजें जिससे उनकी पुनरावृत्ति न हो और जिससे खाद्यान्न में वृद्धि हो तथा परिश्रम से उगाई उपज भी रोगों से सुरक्षित रहे। साथ ही साथ इसका भी ध्यान रहे कि पर्यावरण भी दूषित न हो।

भूतकाल में अन्धविश्वास के कारण काफी हानि हुई है और कई स्थानों पर अब भी अज्ञानवश अनपढ़ लोग पुरानी धारणा रखते हैं। वैज्ञानिकों का ध्येय यह होना चाहिये कि वे ऐसे लोगों को जो विज्ञान से परिचित नहीं हैं विश्वास दिलाये कि विज्ञान भी मनुष्य के जीवन में अनेक समस्याओं के सुलझाने में मार्गदर्शक का काम कर सकता है। वे रूढ़िबद्धता से ग्रसित और अंधविश्वास में लीन लोगों में वैज्ञानिक दृष्टिकोण अपनाने की क्षमता जगाएँ।

विज्ञान द्वारा ही देश की उन्नति का लक्ष्य प्राप्त किया जा सकता है। इसलिये देश के वैज्ञानिकों की दो भूमिकाएँ हो सकती हैं:

1. विज्ञान की वृद्धि के लिये निरंतर काम करना, और

2. अपनी वैज्ञानिक खोज के द्वारा देश की समस्याओं में हाथ बँटाना।

यह तभी सम्भव हो सकता है जब वैज्ञानिक अपने प्रयोग जनता तक पहुँचा सकें, जिससे आम लोग अपने दैनिक कार्यों में वैज्ञानिक दृष्टिकोण अपना कर उसका उपयोग कर सकें।

संदर्भ

1. हील्ड, एफ. डी. : **इन्ट्रोडक्शन टू प्लांट पैथोलॉज़ी,** मैक-ग्राहिल बुक कम्पनी, न्यूयार्क एण्ड लण्डन, द्वितीय संस्करण, (1943)

2. सिंह, आर. एस. : **इन्ट्रोडक्शन टू प्रिन्सपल्स ऑव प्लांट पैथोलॉजी,** ऑक्सफोर्ड एण्ड आई. बी. एच. पब्लिशिंग कम्पनी, प्राइवेट लिमिटेड, नई दिल्ली, तृतीय संस्करण, (1983)

3. रे चौधरी, एस. आर., वर्मा, अनुपम, भार्गव, के. एस., मेहरोत्रा, बी. एस. तथा टण्डन, आर. एन. (सम्पादक) : **एडवान्सेज इन माइकोलॉजी एण्ड प्लांट पैथोलॉजी**, बर्थडे सेलिब्रेशन कमेटी, नई दिल्ली - (1975).

4. चोपड़ा, जी. एल. तथा वर्मा, वी. : **ए टेक्स्टबुक ऑव फंजाई,** प्रदीप पब्लिकेशन्स, जालन्धर, (1975).

5. राय भरत, उपाध्याय, आर. एस. एस., तथा दुबे, एन. के. : **ट्रेण्ड्स इन माइक्रोबियल एक्सप्लॉयटेशन्स** (सम्पादक), आई. एन. सी. आर. (1998).

6. डिक्शन, **डिजीजेज ऑव सीड क्रॉप्स,** मैक-ग्राहिल बुक कम्पनी, न्यूयार्क एण्ड लण्डन

7. राय भरत तथा धर, एम. एस. : (सम्पादक) **न्यू ट्रेण्ड्स इन माइक्रोबियल इकोलॉजी** (प्रो० आर. आर. मिश्र फेलिसिटेशन वोल्यूम) : बॉटनी डिपार्टमेण्ट, नार्थ ईस्टर्न हिल यूनिवर्सिटी, शिलांग और इण्टरनेशनल सोसायटी फॉर कंजर्वेशन ऑव नेचुरल रिसोर्सेज, डिपार्टमेंट ऑव बॉटनी, बी.एच.यू., वाराणसी - (1998)

8. बटलर, ई. जे. तथा जोन्स, एस. जी. : **प्लांट पैथोलॉजी,** लण्डन मैकमिलन एण्ड कम्पनी लिमिटेड न्यूयार्क, सेण्ट मारटिन्स प्रेस, (1955)

9. एग्रिओस, जी. एन. : **प्लांट पैथोलॉजी,** एकेडेमिक प्रेस, न्यूयार्क, (1969)

10. वाकर, जे. सी. : **प्लांट पैथोलॉज़ी**, मैक–ग्राहिल बुक कम्पनी, न्यूयार्क एण्ड लण्डन, द्वितीय संस्करण (1957)

11. **प्लांट डिसीज–एन एडवान्स्ड ट्रेटाइज, वोल्यूम** 5, हाउ प्लांट्स डिफेण्ड देमसेल्व्स, एकेडेमिक प्रेस, न्यूयार्क, (1980)

12. द इयर बुक ऑव एग्रीकल्चर : **प्लांट डिजीजेज,** यूनाइटेड स्टेट्स डिपार्टमेंट ऑव एग्रीकल्चर, वाशिंगटन डी. सी., ऑक्सफोर्ड एण्ड आई. बी. एच. पब्लिशिंग कम्पनी, दिल्ली, इण्डियन एडीशन (1969)

13. हील्ड, ए. डी. : **मैनुएल ऑव प्लांट डिजीजेज,** मैक-ग्राहिल बुक कम्पनी, न्यूयार्क एण्ड लण्डन

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 44, No. 1, January 2001.

बहुचरीय हरमाइट बहुपदों के गुणन

एच. एस. पी. श्रीवास्तव
गणित विभाग, शासकीय कला एवं विज्ञान स्नोत्तकोत्तर महाविद्यालय, रतलाम (म. प्र.)

[प्राप्त - जुलाई 27, 2000]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में बहुचरीय हरमाइट बहुपदों के कुछ गुणन-सूत्र ज्ञात किये गये हैं। इनसे कुछ विशिष्ट दशाएँ भी दिखायी गई हैं।

Abstract

Multiplication of multivariable Hermite polynomial. *By* H.S.P. Shrivastava, Mathematics Department, Govternments Arts and Science PG College, Ratlam (M.P.).

In the present paper few multiplication formulas of Hermite polynomial of several variables have been established. Some particular cases have also been discussed.

1. प्रस्तावना

बहुपदों के सिद्धान्त एवं एक तथा अनेक चरों वाले हाइपरज्यामितीय फलनों में एकतानता लाने के प्रयास में लेखक ने बहुचरीय हरमाइट बहुपद को परिभाषित किया है।[3]। इनको व्यापकीकृत त्रि-हाइपरज्यामितीय फलनों[5] एवं व्यापकीकृत लॉरीसेला फलनों[4] में भी निरूपित किया गया है।

***m*-चरों वाला हरमाइट बहुपद**

$$Hn(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{r_1=0}^{[n/2]} \sum_{r_j=0\ (j=2,3,\ldots m)}^{[n/2-\sum_{p=1}^{j-1} r_p]} \frac{n!\,(2x_1)^{n-2\sum_{j=1}^{m} r_j}\,(-1)^{r_m} \prod_{j=1}^{m-1} (-x_{m+1-j})^{r_j}}{(n-2\sum_{\varphi=1}^{\mu} r_j)!\ \prod_{j=1}^{m} r_j!} \tag{1.1}$$

$$= (2x_1)^n \; F^{1:0;\ldots;0}_{0:0;\ldots;0}\left[\begin{matrix}(-n;2,\ldots,2):\ldots;\ldots;\ldots;\\ \ldots:\ldots;\ldots;\ldots;\end{matrix}\left(-\frac{x_m}{4x_1^2}\right),\ldots,\left(\frac{x_2}{4x_1^2}\right),\left(\frac{-1}{4x_1^2}\right)\right], \tag{1.2}$$

जहाँ पर *F*-फलन *m*-चरों का व्यापकीकृत लॉरीसेला फलन है जिसे श्रीवास्तव तथा दाओस्त [4, eq. (4.1) p.454] ने परिभाषित किया।

m=3 के लिए हमें तीन चरों वाला निम्नलिखित हरमाइट बहुपद प्राप्त होता है। इसी प्रकार अधिक चरों का हरमाइट बहुपद प्राप्त किया जा सकता है।

$$H_n(x,y,z) = \sum_{r=0}^{[n/2]} \sum_{s=0}^{[n/2-r]} \sum_{u=0}^{[n/2-r-s]} \frac{n!\,(2x)^{n-2r-2s-2u}\,(-1)^u\,(-z)^r\,(-y)^s}{(n-2r-2s-2u)!\;r!\,.\,s!\,.\,u!} \tag{1.3}$$

एवं इसका जनक-फलन निम्न प्रकार का होगा :-

$$\exp\,[2xt-(z+y+1)\,t^2] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x,y,z,),\,t^n}{n!} \tag{1.4}$$

m-चरों वाले हरमाइट बहुपद का जनक-फलन निम्नवत् होता है-

$$\exp\,[2xt-(x_m+x_{m-1}+\ldots+x_3+x_2+1)\,t^2] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x_1,x_2,\ldots,x_m)\,t^n}{n!} \tag{1.5}$$

जबकि बहुचर्चित हरमाइट बहुपद एवं इसका जनक-फलन निम्न प्रकार के होते हैं [1, eq. (1), (2), p.187] :

$$H_n(x) = \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^r\,n!\,(2x)^{n-2r}}{n!}, \tag{1.6}$$

और

$$\exp\,[2xt-t^2] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)\,t^n}{n!} \tag{1.7}$$

2. गुणन-सूत्र

हम निम्नलिखित बहुचरीय हरमाइट बहुपदों के गुणन-सूत्रों को सिद्ध करेंगे :

$$H_n(x, y, z_1, + z_2) H_k(x, y) = H_n(x, y, z_1) \,.\, H_k(x, y, z_2), \tag{2.1}$$

$$H_n(x_1, x_2, ..., x_{m-1}, x_m + x_m^1) \, H_k(x_1, x_2, ..., x_{m-1})$$
$$= H_n(x_1, ..., x_m) \, H_k(x_1, ..., x_{m-1}, x_m^1), \tag{2.2}$$

$$H_n(x, y_1 + y_2, z) H_k(x, z) = H_n(x, y_1, z) \,.\, H_k(x, y_2, z), \tag{2.3}$$

$$H_n(x_1, x_2 + x_2^1, x_3, ..., x_m) \, H_k(x_1, x_3, ..., x_m)$$
$$= H_n(x_1, ..., x_m) \, H_k(x_1, x_2^1, x_3, ..., x_m), \tag{2.4}$$

$$H_n(x_1 + x_2, y, z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(2 x_2\right)^k H_{n-k}(x_1, y, z) \tag{2.5}$$

$$H_n(x_1 + x'_1, x_2, ..., x_m) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(2 x_1\right)^k H_{n-k}(x_1, x_2, ..., x_m) \tag{2.6}$$

$$H_n(x_1 + x_2, y, z) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{[n/2]} \frac{(z + y + 1)^s \; n! \; H_r(x_2, y, z) \; H_{n-r-2s}(x, y, z)}{(n - r - 2s)! \; r! \; s!} \tag{2.7}$$

$$H_n(x_1 + x_1^1, x_2, ..., x_m) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{[n/2]}$$
$$\frac{(x_m + ... + x_2 + 1)^s \, n! \; H_{n-r-2s}(x_1, ..., x_m) \; H_r(x_1^1, x_2, ..., x_m)}{(n - r - 2s)! \;\; r! \;\; s!}, \tag{2.8}$$

$$H_n(x_1 + x_2, y, z) = \frac{(-1)^r \; H_n(x_1, y, z) \; H_{2r}(x_2, y, z)}{(z + y + 1)^r \; 2^{2r} \; (1/2)_r} \tag{2.9}$$

$$H_n(x_1+x_1^1, x_2, ..., x_m) = \frac{(-1)^r\ H_n(x_1, ..., x_m)\ H_{2r}(x_1^1, x_2, ..., x_m)}{(x_m+...+x_2+1)^r\ 2^{2r}\ (1/2)_r} \tag{2.10}$$

$$H_n(x_1+x_2, y, z)\ H_r(x_1) = \sum_{s=0}^{n} \frac{n!\ H_{n-s}(x_1, y, z)\ H_r(x_2, y, z)\ H_s(x_1, -y-1, -z)}{s!\ (n-s)!} \tag{2.11}$$

$$H_n(x_1+x_1^1, x_2, ..., x_m) \cdot H_r(x_1)$$

$$= \sum_{s=0}^{n} \frac{n!\ H_{n-s}(x_1, ..., x_m)\ H_r(x_1^1, x_2, ..., x_m)\ H_s(x_1, -x_2-1, -x_3 ..., -x_m)}{s!\ (n-s)!} \tag{2.12}$$

टिप्पणी : (2.11) में $Hs\ (x_1, -y-1, -z)$ की जगह $Hs\ (x_1, -y, -z-1)$ भी लिया जा सकता है। इसी प्रकार (2.12) में भी।

(2.1) की उपपत्ति :

$$\exp\ [2xt - (z_1+z_2+y+1)t^2]\ \exp\ [2xt-(y+1)t^2]$$

$$= \exp\ [2xt - (z_1+y+1)t^2]\ \exp\ [2xt - (z_2+y+1)t^2]:$$

जनक-फलन सूत्र (1.4) का प्रयोग दोनों ओर करने पर हमें प्राप्त होता है :–

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_n(x, y, z_1+z_2)\ H_k(x-y)\ t^{n+k}}{n!\ k!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_n(x, y, z_1)\ H_k(x, y, z_2)\ t^{n+k}}{n!\ k!}$$

दोनों ओर के t^{n+k} के गुणांकों की तुलना करने पर हमें (2.1) सूत्र की प्राप्ति होती है। इसी प्रकार (2.2) से (2.4) सूत्रों को सिद्ध किया जा सकता है।

(2.5) की उपपत्ति

$$\exp\,[2(x_1+x_2)t-(z+y+1)t^2] - \exp\,[2x_1 t-(z+y+1)t^2]\,\exp(2x_2 t)$$

जनक-फलन (1.4) एवं $\exp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, का प्रयोग करने पर हमें प्राप्त होता है —

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x_1+x_2,y,z,)\,t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{H_n(x_1,y,z)\,(2x_2)^k\,t^{n+k}}{n!\;k!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{H_{n-k}(x_1,y,z)\,(2x_2)^k\,t^n}{k!\,(n-k)!}$$

दोनों ओर के t^n के गुणांकों की तुलना करने पर हमें सूत्र (2.5) की प्राप्ति होती है। इसी प्रकार सूत्र (2.6) भी सिद्ध किया जा सकता है।

(2.7) की उपपत्ति :

$$\exp\left[(x_1+x_2)t-(z+y+1)t^2\right]=\exp\left[2x_1 t-(z+y+1)t^2\right]$$

$$\exp\left[2x_2 t-(z+y+1)t^2\right]\exp\left[(z+y+1)t^2\right]$$

जनक-फलन सूत्र (1.4) एवं सूत्र $\exp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ का प्रयोग पर हमें प्राप्त होता है :-

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x_1+x_2,y,z)\,t^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{H_n(x_1,y,z)\,H_r(x_2,y,1)\,(z+y+1)^s\,t^{n+r+2s}}{n!\,r!\,s!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{[n/2]}\frac{H_{n-2s}(x_1,y,z)\,H_r(x_2,y,1)\,(z+y+1)^s\,t^{n+r}}{(n-2s)!\,r!\,s!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{[n/2]}\frac{H_{n-r-2s}(x_1,y,z)\,H_r(x_2,y,z)\,(z+y+1)^s\,t^{n}}{(n-r-2s)!\,r!\,s!}$$

दोनों ओर के t^n के गुणांकों की तुलना करने पर हमें (2.7) सूत्र प्राप्त होता है। इसी प्रकार (2.8) सूत्र भी सिद्ध किया जा सकता है।

(2.9) की उपपत्ति :

$$\exp\left[2(x_1+x_2)t-(z+y+1)t^2\right]\exp\left[2x_1t-t^2\right]$$

$$=\exp\left[2x_1t-(z+y+1)t^2\right]\exp\left[2x_2t-(z+y+1)t^2\right]$$

$$\exp\left[2x_1t-\{(-z)+(-y-1)+1\}t^2\right]$$

जनक फलन (1.4) का प्रयोग दोनों ओर करने पर प्राप्त होता है :-

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{H_n(x_1+x_2,y,z)\,H_r(x_1)t^{n+k}}{n!\,r!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{H_n(x_1,y,z)H_r(x_2,y,z)\,H_s(x_1,-y-1,-z)\,t^{n+k+s}}{n1\,r!\,s!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{H_{n-r}(x_1,y,z)H_r(x_2,y,z)\,H_s(x_1,-y-1,-z)\,t^{n+k}}{n1\,r!\,s!}$$

दोनों ओर के t^{n+r} के गुणांकों की तुलना करने पर हमें (2.9) सूत्र प्राप्त होता है। इसी प्रकार (2.10) सूत्र भी सिद्ध किया जा सकता है।

(2.11) की उपपत्ति :

$$\exp\left[2(x_1+x_2)t-(z-y-1)t^2\right]\exp\left[-(z+y+1)t^2\right]$$

$$=\exp\left[2x_1t-(z+y+1)t^2\right]\exp\left[2x_2t-(z+y+1)t^2\right]$$

जनक-फलन सूत्र (1.4) एवं सूत्र $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, का प्रयोग करने पर

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{H_n(x_1 + x_2, y, z)\,(-1)^r (z+y+1)^r\, t^{n+2r}}{n!\, r!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{H_n(x_1, y, z)\, H_r(x_2, y, z)\, t^{n+r}}{n!\, r!}$$

दोनों ओर के t^{n+r} के गुणांकों की तुलना करने पर हमें सूत्र (2.11) प्राप्त होता है। इसी प्रकार सूत्र (2.12) भी सिद्ध किया जा सकता है।

3. विशिष्ट दशाएँ

सूत्र (2.1) से (2.12) के चरों का विशिष्टीकरण करने पर हमें अनेक नये सूत्र प्राप्त होंगे। उदाहरणार्थ-

(i) सूत्र (2.3), (2.5), (2.7), (2.9), (2.11) में $z = 0$ [(2.1) में $y = 0$] रखने पर हमें दो चर के बहुचर्चित हरमाइट बहुपद के सूत्र प्राप्त होंगे जबकि *Hn(x, y, 0) = Hn (x, y)*., [3]

(ii) सूत्र (2.5), (2.7), (2.9), (.11) में $y = z = 0$ रखने पर हमें एक चर के बहुचर्चित हरमाइट बहुपद के सूत्र प्राप्त होंगे क्योंकि *Hn(x, 0, 0,) = Hn (x)*, [3].

$$H_n(x_1 + x_2) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2x_2)^k\, H_{n-k}(x_1) \qquad (3.1)$$

$$H_n(x_1 + x_2) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{[n/2]} \frac{n!\, H_r(x_2)\, H_{n-r-2s}(x_1)}{(n-r-2s)!\; r!\; s!} \qquad (3.2)$$

$$H_n(x_1 + x_2) = \frac{(-1)^r\, H_n(x_1)\, H_{2r}(x_2)}{2^{2r}\,(1/2)_r} \qquad (3.3)$$

$$H_n(x_1 + x_2) = \sum_{s=0}^{n} \frac{n!\; H_{n-s}(x_1)\, H_r(x_2)\, H_s(x_1)}{s!\,(n-s)!} \qquad (3.4)$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक यू. जी. सी. (इंडिया) के प्रति अपना आभार व्यक्त करता है जिसने लेखक को वित्तीय सहायता प्रदान की है।

निर्देश

1. रेनविले, ई. डी. : Special Functions, The McMillan & Co. N.Y. (1967).
2. श्रीवास्तव, एच. एस. पी. : Int. Trans. and Spec. Funct. 2000, 10(1), 61-70.
3. श्रीवास्तव, एच. एस. पी. : J. Indian Acad. Math. (प्रेषित)
4. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा दाओस्त, एम. सी. : Nederl. Acad. Westensch. Indag. Math. 1969, 31, 449-457.
5. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा मनोचा, एच. एल. : A Treatise on Generating Functions, John Willey & Sons, NY (1984).
6. श्रीवास्तव, एच. एम., गुप्ता के. सी. तथा गोयल, एस. पी. : The G-function of One and two Variables with Applications. South Asian Publ. Delhi (1982).

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 44, No. 1, January 2001.

सहजीवी नाइट्रोजन-स्थिरीकरण पर पाइराइट के प्रयोग का अध्ययन

ईश्वर चन्द्र शुक्ल तथा विनीता शुक्ल
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त - अगस्त 2, 2000]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में कैल्सियम युक्त मृदा में 'चिक पी' *साइसर एरिएटिनम एल.* (*Cicer areatinum,* L.) जीन प्ररूप (Genotype) पर पाइराइट के प्रभाव का अध्ययन किया गया है। मुख्यतः ग्रन्थिकाओं की संख्या, उनका शुष्क भार, उपज तथा सक्रिय तत्व के बारे में विशेष जानकारी दी गई है।

Abstract

Study of the effect of pyrite of symbiotic nitrogen fixation. *By* Ishwar Chandra Shukla and Vinita Shukla, Department of Chemistry, University of Allahabad, Allahabad.

In the present paper, the effect of pyrite on various genotypes of 'chick pea' (*Cicer areatinum*, L.) a leguminous plant in calcareous soil has been studied and described. Special emphasis has been laid on parameters such as number of nodules, their dry weight, production of nodules and active iron.

वर्तमान समय में फलीदार फसलों का कम उत्पादन केवल सहजीवी नाइट्रोजन स्थिरीकरण पर ही निर्भर नहीं करता बल्कि पोषक तत्वों की कमी के कारण भी होता है।[1, 2] आमतौर से कैल्सियम युक्त मृदा में उच्च पी-एच तथा मुक्त कैल्सियम कार्बोनेट के कारण लौह तत्व की प्राप्ति एक समस्या बनी रहती है। नाइट्रोजन-स्थिरीकरण में लौह तत्व की आवश्यकता विशेष रूप से नाइट्रोजिनेस एन्ज़ाइम के साथ जटिल यौगिक बनाने हेतु पड़ती है। लौह तत्व की कमी नाइट्रोजन-स्थिरीकरण में परजीवी पौध-वृद्धि के रुकने के कारण होती है। एक वैचारिक मतभेद यह है कि लौह तत्व की कमी प्रत्यक्ष या अप्रत्यक्ष रूप में नाइट्रोजन-स्थिरीकरण को प्रभावित करती है। इसी मतभेद को दूर करने हेतु कृषि क्षेत्रों में पाइराइट के प्रयोग विभिन्न स्तरों पर किये गये।

प्रयोगात्मक

उपर्युक्त अध्ययन हेतु दोमट मृदा में प्रयोग किये गये, जिसका पी-एच 8.5, मुक्त $CaCO_3$ 36.5%, वैद्युत चालकता 0.476 मि.महो/से.मी., कार्बनिक कार्बन 0.385% तथा उपलब्ध P_2O_5 35 किग्रा/हे. था। मृदा के डी. टी. पी. ए. निष्कर्षण द्वारा Zn, Cu, Fe तथा Mn का मान क्रमशः 0.46, 1.83, 4.45 तथा 7.4 पी.पी.एम. पाया गया। बीजों की ऊपरी सतह को रोगाणुनाशित किया गया तथा 10% शर्करा-घोल में *राइज़ोबियम (Rhizobium)* विभेद RG-3 के साथ पंक **(Press mud)** संरोपित करके 5×3 मी. के खंडों में 30×10 सेमी. के अंतर से बोया गया। पाइराइट में Fe 13.5%, S 15%, MgO 0.5%, CaO.5%, Al_2O_3 0.8%, SiO_2 45%, C 3%, Zn 80 पी पी एस, Cu **50** पी.पी.एम; Mn 40 पी.पी.एम. तथा पी-एच 4.5 था। सभी कृषि खंडों में समान रूप से उर्वरकों का प्रयोग किया गया। नाइट्रोजन 10 तथा P_2O_5 30 किग्रा./हे. क्रमशः यूरिया तथा सुपरफॉस्फेट के रूप में दिये गये हैं। बोने के 45 दिनों बाद पौधों को सावधानी से उखाड़ लिया गया, जिससे उनकी जड़ों की ग्रंथियाँ सुरक्षित रहें। तत्पश्चात् जड़ों को पानी से धोकर साफ कर लिया गया। जड़-ग्रंथियों का अध्ययन उनके गुलाबी रंग, वृद्धि तथा विकास के आधार पर किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

प्राप्त परिणाम सारणी 1–4 में दिये जा रहे हैं। अन्वेषणों द्वारा प्राप्त हुआ कि पाइराइट का प्रयोग फसल की पैदावार को प्रभावी रूप से बढ़ा देता है। जीनप्ररूप C 235 अत्यधिक उत्पाद देता है तथा जीनप्ररूप H 208 उससे कम और सबसे कम उत्पाद BR 77 देता है। मूल ग्रंथियों की संख्या (सारणी 1) तथा उनके शुष्क भार (सारणी 2) के अध्ययन से यह प्रदर्शित होता है कि पाइराइट का प्रयोग ग्रंथियों की संख्या तथा शुष्क भार को सभी जीनप्ररूपों में बढ़ा देता है। सबसे अधिक प्रभाव C 235 पर पड़ता है। इसी प्ररूप में लौह की यात्रा भी सर्वाधिक पायी गई (सारणी 3)।

सारणी 1

पाइराइट का ग्रंथि निर्माण पर प्रभाव (ग्रंथि संख्या/पौधा)

उपचार	G_1		G_2		G_3		औसत
	P_m 0	P_m 50	P_m 0	P_m 50	P_m 0	P_m 50	
P_0	8.5	12.8	7.2	9.8	5.0	7.0	8.5
P_8	10.5	15.0	8.5	13.5	6.0	8.5	10.3
P_{16}	13.8	17.8	10.2	11.3	7.3	10.2	12.3
P_{24}	12.5	10.3	9.0	9.0	6.5	6.2	8.9
औसत	11.3	13.9	8.7	11.6	6.4	7.9	

L.S.D. 5% पर G 0.13, P_m 0.11, P. 0.15, G× P_m 0.19, G× P 0.26 P_m × P 0.22, G × P_m × P 0.37

G = जीन प्रारूप P = पाइराइट P_m = प्रेसमड $G_1 = C_{235}$ $G_2 = H_{208}$ $G_3 = BR_{77}$

सारणी 2

पाइराइट का ग्रंथियों के शुष्क भार पर प्रभाव (ग्रंथि/पौधा) (मि. ग्रा.)

उपचार	G_1		G_2		G_3		औसत
	P_m 0	P_m 50	P_m 0	P_m 50	P_m 0	P_m 50	
P_0	48.3	85.0	42.5	70.3	35.3	51.0	55.4
P_8	75.5	105.0	60.3	85.5	52.5	60.5	73.2
P_{16}	89.0	120.5	72.2	92.3	55.5	70.3	83.3
P_{24}	92.5	98.5	75.5	78.5	56.0	60.5	76.9
औसत	76.3	102.2	62.6	81.6	49.8	60.6	

L.S.D. 5% पर G 0.33, P_m 0.26, P. 0.37, G × P_m 0.46, G × P 065 P_m × P .54, G × P_m × P 0.93

G = जीन प्रारूप P = पाइराइट P_m = प्रेसमड $G_1 = C_{235}$ $G_2 = H_{208}$ $G_3 = BR_{77}$

सारणी 3

पाइराइट का ग्रंथियों के सक्रिय लौह पर प्रभाव (μg/5g **शुष्क ग्रंथि)**

उपचार	G_1		G_2		G_3		औसत
	P_m 0	P_m 50	P_m 0	P_m 50	P_m 0	P_m 50	
P_0	577.0	1155.0	408.0	717.0	355.0	400.0	602.0
P_8	605.0	1398.0	425.0	976.0	377.0	585.0	630.2
P_{16}	1278.0	1632.0	745.0	1255.0	474.0	688.0	1012.0
P_{24}	1050.0	1284.0	545.0	978.0	405.0	598.0	810.0
औसत	877.5	1367.3	530.8	981.5	402.8	567.8	

L.S.D. 5% पर G 2.36, P_m 1.93, P. 2.73, G × P_m 3.34, G × P40766 P_m × P30862, G × P 6.69
G = जीन प्रारूप P = पाइराइट P_m = प्रेसमड $G_1 = C_{235}$ $G_2 = H_{208}$ $G_3 = BR_{77}$

पाइराइट में स्थूल तथा सूक्ष्म दोनों ही प्रकार के पोषक तत्व, विशेषतः लौह, पाये जाते हैं। गंधक की उपस्थिति मृदा में गंधक का अम्ल बनाकर मृदा का पी-एच कम करती है। यही अम्ल कैल्सियम कार्बोनेट से क्रिया करके कैल्सियम सल्फेट बनाता है[3, 4]। जब बीजों में लौह का आकलन किया गया (सारणी 4) तो पाया गया कि पाइराइट के प्रयोग से लौह में प्रभावी वृद्धि हुई। यह भी पाया गया कि लौह के उपापचयन हेतु परजीवी का जीन अधिक महत्व रखता है।

डाइनाइट्रोजन-स्थिरीकरण में भी यही प्रभाव देखा गया[5, 6]। पोषक तत्व फलीदार पौधों में नाइट्रोजन का उत्पादन तीन प्रकार से प्रभावित करते हैं। ये प्रत्यक्ष रूप से ग्रंथियों के निर्माण को प्रोत्साहित

सारणी 4

बीजों के लौह तत्व पर पाइराइट का प्रभाव (मि. ग्रा./100 ग्रा.)

उपचार	G_1		G_2		G_3		औसत
	P_m 0	P_m 50	P_m 0	P_m 50	P_m 0	P_m 50	
P_0	3.75	3.93	3.55	3.67	3.05	3.10	3.50
P_8	3.95	4.98	3.71	4.17	3.35	3.60	3.96
P_{16}	4.30	4.92	3.93	4.32	3.41	3.67	4.09
P_{24}	4.25	4.31	3.82	3.91	3.32	3.55	3.86
औसत	4.06	4.53	3.76	4.02	3.30	3.48	

L.S.D.5% पर G 0.05, P_m 0.04, P. 0.06, G× P_m 0.07, G× P 0.1 P_m × P 011, G × P_m × P 051

G = जीन प्रारूप P = पाइराइट P_m = प्रेसमड $G_1 = C_{235}$ $G_2 = H_{208}$ $G_3 = BR_{77}$

कर सकते हैं, राइज़ोबियम-सहजीविता क्रिया को प्रभावित कर सकते हैं और साथ ही साथ लौह पौधों में प्रकाश-संश्लेषण को भी प्रभावित करता है।

निर्देश

1. श्रीवास्तव, एस. के., रत्नम्, एन. वी. तथा तिवारी, डी. के. : इण्डियन जर्नल ऑफ बाटनी, 1982, 5, 99.
2. ब्राउन, जे. सी. तथा होल्मर, आर. एस. : प्लाण्ट फ़िजियोलॉजी, 1955, 30, 451.
3. सिनहा, एन. पी., सिंह, एस. एन. तथा प्रसाद, जे. : फर्टिलाइजर टेक्नोलॉजी, 1977, 14, 348.
4. राय, आर. अशरफ, एम. एच. तथा चौधरी, एस. एन. : फर्टिलाइजर टेक्नोलॉजी, 1977, 14, 370.
5. ब्राउन, जे. सी., वेवर, सी. आर., तथा काल्डवेल, वी. ई. : एग्रोनाभी जर्नल, 1967, 59, 459.
6. ब्राउन, जे. सी., अम्बर, जे. ई., चावे, आर. एल. तथा साई, सी. डी. : जर्न० स्वायल साइन्स सोसाइटी ऑफ अमेरिका, 1972, 399-418.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 44, No. 1, January 2001.

होलोमार्फिकतः अर्ध संमित संबंधन के कतिपय वक्रता तत्समक

आर. एन. सिंह
गणित तथा सांख्यिकी विभाग, ए. पी. एस. यूनिवर्सिटी, रीवाँ (म. प्र.)

[प्राप्त - अप्रैल 23, 1999]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में होलोमार्फिकतः अर्धसंमित संबंधन की वक्रता विषयक कतिपय तत्समकों का अध्ययन किया गया है।

Abstract

Some curvature identities of a holomorphically semi symmetric connexion. *By* R. N. Singh, Department of Mathematics & Statistics, A. P. S. University, Rewa (M. P.)

In the present paper we have studied some identities on the curvature of a holomorphically semi-symmetric connexion.

1. प्रस्तावना

प्रायः हर्मिट प्रसमष्टि (Hermite manifold) जिसके लिए

$$(D_x F) = 0 \tag{1.1}$$

की तुष्टि होती है वह काह्लर प्रसमष्टि कहा जाता है जिसमें D रीमानी संबंधन है g के प्रति तथा

$$\bar{X} = F(X) \qquad [4]$$

माना कि काह्लर प्रसमष्टि में संबंधन D वक्रता प्रदिश (टेंसर) है और माना कि

$$K' \text{ [illegible] } = g(K(X, Y, Z), W) \tag{1.2}$$

तो हमें निम्नांकित तत्समक (identities) मिलते हैं–

$$K(X, Y, \bar{Z}) = \overline{K(X, Y, Z)}, \tag{1.3}$$

$$K(X, Y, \bar{Z}, \bar{W}) = K(\bar{X}, \bar{Y}, Z, W), \tag{1.4}$$

$$\text{Ric}(\bar{X}, \bar{Y}) = \text{Ric}(X, Y) \tag{1.5}$$

$$R(\bar{X}) = \overline{(R(X)}, \tag{1.6}$$

जिसमें

$$G(R(Y), Z) \underset{\text{def}}{=} \text{Ric}(Y, Z)$$

द्वारा परिभाषित R रिची प्रतिचित्र (Ricci map) कहलाता है।

2. हैलोमार्फिकतः अर्धसंमित प्रबंधन

प्रायः संमिश्र प्रसमष्टि में एक सजातीय संबंधन D को F-संबंधन कहा जाता है यदि $D_x F = 0$

एक n-विमीय विभेदी प्रसमष्टि M में संबंधन को अर्धसंमित कहा जाता है यदि इसका विमोटन प्रदिश (Torsion tensor) S का रूप

$$S(X, Y) = p(X)Y - p(Y)X$$

होता है जहाँ p I रूप है।

बार्टोलोटी[1] ने अर्धसंमित संबंधन का ज्यामितीय अर्थ दिया और इसमें निम्नांकित होते हैं। माना U तथा V दो वेक्टर हैं। वेक्टर $S(U, V)$, U तथा V रैखिकतः स्वतन्त्र होते हैं। किन्तु यदि

$$S(U, V) = AU + BV,$$

प्रत्येक U तथा V के लिए जहाँ A तथा B अदिश (Scalars) हैं तब S का रूप (2.1) है और इसके विपरीत भी। अब हम विषम संमित प्रदिश S पर विचार करेंगे जो प्रतिबन्ध

$$S(U, \bar{U}) = AU + B\bar{U}$$

को प्रायः हर्मिट प्रसमष्टि में तुष्ट करता है। यदि S प्रत्येक U के लिए (2.3) की तुष्टि करे तो S को

$$S(X,Y) = p(X)Y - p(Y)X + p(\bar{X})\bar{Y} - p(\bar{Y})\bar{X} \qquad (2.4)$$

द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है जहाँ p l रूप है।

रूप (2.4) वाला विमोटन प्रदिश का सजातीय संबंधन होलोमार्फिक्कतः अर्धसंमित संबंधन कहलाता है। प्रायः हर्मिट प्रसमष्टि का सरलतम संबंधन जिसके विमोटक प्रदिश का रूप (2.4) है, वह

$$D_x Y = \overset{0}{D}_x Y + p(X)Y + p(\bar{X})\bar{Y} \qquad (2.5)$$

जहाँ D रीमानी संबंधन को बताता है। यह संबंधन F संबंधन है किन्तु यह है मेट्रिक नहीं है।[3]

प्रमेय 2.1 : $2D_x Y - S(X,Y) + \overline{S(X,Y)}$ अचर है होलोमार्फिक्कतः संमित परिवर्तन का जहाँ S है विमोटक प्रदिश होलोमार्फिक्कतः अर्धसंमित संबंधन D का।

उपपत्ति : (2.4) से हमें प्राप्त होता है -

$$\overline{S(X,Y)} = -p(X)Y - p(Y)X - p(\bar{X})\bar{Y} - p(\bar{Y})\bar{X}. \qquad (2.6)$$

(2.4) तथा (2.6) के तहत

$$p(X)Y + p(\bar{X})\bar{Y} = 1/2\,(S(X,Y) - \overline{S(X,Y)})$$

(2.5) में से p का विलोपन करने पर

$$2\overset{0}{D}_x Y = 2D_x Y - S(X,Y) + S\overline{(X,Y)}$$

चूँकि $\overset{0}{D}$ रीमानी संबंधन है अतः इसका विमोटक प्रदिश शून्य है। इसलिए

$$2D_x Y - S(X,Y) + S(X,Y),$$

निश्चर है होलोमार्फिक्कतः अर्धसंमित परिवर्तन का।

3. वक्रता तत्समक (Curvature identities)

माना कि R तथा K विमोटक प्रदिश हैं संबंधन D तथा D^o के जिन्हें समीकरण (2.5) द्वारा परिभाषित किया जाता है तथा माना कि $R(X,Y) = (C_1^{\,1} R)(X,Y)$ तो काहलर समष्टि में[3]

$$R(X, Y, Z) + 1/2\,(R(X, Y) - R(Y, X))\,Z + 1/2\,(R(\overline{X}, Y) - R(\overline{Y}, X))\,\overline{Z}$$
$$= K(X, Y, Z) - \mathrm{Ric}\,(X, \overline{Y})\,\overline{Z}, \tag{3.1}$$

अब

$$H(X, Y, Z) = R(X, Y, Z) + 1/2\,(R(X, Y) - R(Y, X))\,Z + 1/2\,(R(\overline{X}, Y) - R(\overline{Y}, X))\,\overline{Z} \tag{3.2}$$

रखें जो होलोमार्फिकतः अर्ध संमित परिवर्तन का निश्चर है। H को होलोमार्फिकतः अर्ध संमित वक्रता प्रदिश के रूप में परिभाषित किया जा सकता है। इस प्रकार

$$H(X, Y, Z) = K(X, Y, Z) - Ric\,(X, \overline{Y},)\,\overline{Z} \tag{3.3}$$

प्रमेय 3.1 : यदि काहलर प्रसमष्टि सपाट हो तो यह होलोमार्फिक अर्ध संमिततः सपाट होता है।

उपपत्ति : यह काहलर प्रसमंष्टि सपाट है यानी $K = 0$ तो (3.3) से हमें $H = 0$ मिलता है।

प्रमेय 3.2 : यदि काहलर प्रसमष्टि आवर्ती है तो होलोमार्फिक अर्धसंमित आवर्ती होता है।

उपपत्ति : (3.3) का अवकलन करने पर

$$(\overset{0}{D}w\,H)\,(X, Y, Z) = \overset{0}{D}w\,K)\,(X, Y, Z) - (\overset{0}{D}w\,\mathrm{Ric}\,(X, \overline{Y})\,\overline{Z} \tag{3.4}$$

जहाँ $\overset{0}{D}$ रीमान संबंधन है। यदि काहलर प्रसमष्टि आवर्ती है अर्थात्

$$(\overset{0}{D}w\,K)\ (X, Y, Z) = \alpha\,(W)\ (K\,(X, Y, Z) \tag{3.5}$$

जहाँ α आवर्तन l-रूप है। तब (3.4) में (3.3) तथा (3.5) का सम्प्रयोग करने पर

$$\left\{(\overset{0}{D}w\,H)\ (X, Y, Z) - \alpha\,(W)\ H\,(X, Y, Z)\right\} + \left\{\overset{0}{D}w\,\mathrm{Ric}\,(X, \overline{Y}) - \alpha\,(W)\,Ric\,(X, \overline{Y})\right\}\ \overline{Z} = 0 \tag{3.6}$$

इस प्रकार

$$(\overset{0}{D}w\,H)\ (X, Y, Z) = \alpha\,(W)\ H\,(X, Y, Z)$$

क्योंकि

$$(\overset{0}{D}w\,\mathrm{Ric})\ (X, \overline{Y}) = \alpha\,(W)\ \mathrm{Ric}\,(X, \overline{Y})$$

प्रमेय 3.3 : यदि काहलर प्रसमष्टि संमित है तो इसका होलोमार्फिक अर्ध संमित वक्रता प्रदिश संबंधन $\overset{0}{D}$ के प्रति संमित होता है।

उपपत्ति : (3.3) का अवकलन करने पर–

$$(\overset{0}{D}w\,H)\;(X, Y, Z) = (\overset{0}{D}w\,K\;(X, Y, Z) - (\overset{0}{D}w\;\mathrm{Ric})\;(X, \overline{Y})\,\overline{Z} \tag{3.7}$$

जहाँ $\overset{0}{D}$ रीमानी संबंधन है। यदि काहलर प्रसमष्टि संमित है अर्थात्

$$\overset{0}{D}w\,K = 0 \tag{3.8}$$

तो उपर्युक्त समीकरण में इसका प्रयोग करने पर

$$\overset{0}{D}w\,H = 0 \tag{3.9}$$

प्रमेय 3.4 : हमें ज्ञात है कि

$$C_1^1\;H = C_2^1 H = C_3^1\;H = 0 \tag{3.10}$$

उपपत्ति : हमें ज्ञात है कि

$$H(X, Y, Z) = K(X, Y, Z) - \mathbf{Ric}(X, \overline{Y})\,\overline{Z}$$

X के प्रति संकुचन करने पर

$$(C_1^1\;H)\;(Y, Z) = \mathrm{Ric}\,(Y, Z) - \mathrm{Ric}\,(\overline{Y},\;\overline{Z}) = 0$$

इसी तरह Y तथा Z के प्रति संकुचन करने पर

$$C_1^2\;H = C_3^1\;H = 0$$

इस तरह

$$C_1^1\;H = C_2^1\;H = C_3^1\;H = 0$$

प्रमेय 3.5 (a) H (X, Y, Z) + H(Y, Z, X) + H(Z, X, Y)

$$= -\{\mathrm{Ric}\,(X, \overline{Y})\overline{Z} + \mathrm{Ric}\,(Y, \overline{Z})\overline{X} + \mathrm{Ric}\,(Z, \overline{X})\overline{Y}\} \tag{3.11}$$

(b) $(\overset{0}{D}_x\;H\;(Y, Z, W) + (\overset{0}{D}_y\;H)\;(Z, X, W) + \overset{0}{D}_x\;H)\;(X, Y, W) = 0$

उपपत्ति : हम जानते हैं कि

$$H(X,Y,Z) = K(X,Y,Z) - \text{Ric}\,(X,\overline{Y})\,\overline{Z}$$

अन्य दोनों समीकरणों को X, Y तथा Z के चक्रीय क्रमचय द्वारा लिखने पर तथा उन्हें इस समीकरण में जोड़ देने एवं बियांची प्रथम तत्समक का उपयोग करने पर हमें (3.11) a प्राप्त होता है।
और भी, हमें (3.3) से मिलता है–

$$(\overset{0}{D}_x H)\,(Y,Z,W) = \overset{0}{D}_x K\,(Y,Z,W) - (\overset{0}{D}_x \text{Ric})\,(Y,\overline{Z})\,\overline{W}$$

अन्य दो समीकरणों को X, Y, Z के चक्रीय क्रमचय द्वारा लिखने तथा इन्हें इस समीकरण में जोड़ने एवं बियांची के द्वितीय तत्समक का प्रयोग करने पर हमें *(b)* की प्राप्ति होती है।

निम्नांकित तत्समकों को प्राप्त करना सरल है।

प्रमेय 3.6

$$\text{(a)}\quad 'H(X,Y,Z) + \overline{H(X,Y,\overline{Z})} = 0 \qquad (3.12)$$

$$\text{(b)}\quad 'H(X,Y,\overline{Z},\overline{W}) = 'H(\overline{X},\overline{Y},Z,W) = 'H(\overline{X},\overline{Y},\overline{Z},\overline{W}) = 'H(X,Y,Z,W)$$

$$\text{(c)}\quad 'H(X,Y,\overline{Z},W) + 'H(X,Y,Z,\overline{W}) = 0$$

$$\text{(d)}\quad 'H(X,\overline{Y},Z,\overline{W}) - H(\overline{X},Y,\overline{Z},W) = 0$$

जहाँ $'H(X,Y,Z,W) = g(H(X,Y,Z),W)$

निर्देश

1. बार्टोलोटी, ई. Annals of Discrete Mathematics, North Holland, Amsterdam 1930, 8, 53-101.
2. इमाई, टी. Tensor, N. S. 1972, 24, 293-296.
3. पर्वानोविक, एम. Univ, U. Novoem Sadu , Zb, Rad, Period. - Mat Fasc 1979, 9, 91-99.
4. यानो, के. Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces, Pergamon Press, Oxford (1965).
5. यानो, के. तथा इमाई, टी. Tensor N. S. 1975, 29, 134-138.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 44, No. 1, January 2001

सार्वीकृत *H*-फलन का प्राचल के प्रति समाकलन

ए० के० रोंघे
गणित विभाग, एस० एस० एल० जैन स्नातकोत्तर महाविद्यालय, विदिशा (म० प्र०)

[प्राप्त - जून 5, 2000]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में सार्वीकृत H-फलन का प्राचल के प्रति समाकलन का मान ज्ञात किया गया है। अनेक नये परिणामों को उनकी विशिष्ट दशाओं के रूप में प्राप्त किया गया है।

Abstract

Integration of generalized H-function with respect to a parameter. ***By.*** **A. K. Ronghe, Department of Mathematics, S. S. L. Jain P. G. College, Vidisha (M. P.).**

In this paper few integrals involving generalized H-function have been evaluated, where the integration has been performed w.r.t. a parameter of I-function. Many new relations may be obtained as particular cases.

1. प्रस्तावना

सक्सेना का सार्वीकृत *H*-फलन[7] जो कि I-फलन द्वारा जाना जाता है, जिसके गुणधर्मों का अध्ययन वैश्य, जैन तथा वर्मा[6] एवं रोंघे[5] के शोधपत्रों में किया गया है, इस फलन को निम्नवत् प्रस्तुत कर रहे हैं–

$$I[z] = I^{m,l}_{p_i, q_{i,r}} \left[Z \,\middle|\, \begin{matrix} \phi_1, & \phi_2 \\ \phi_3, & \phi_4 \end{matrix} \right] = \frac{1}{2\pi\omega} \int_{-\infty\omega}^{+\infty\omega} \theta(S)\, Z^S \, dS \tag{1.1}$$

जहाँ

$$\phi_1 \equiv \left[\left(a_j, \alpha_j\right)_{1, l}\right], \phi_3 \equiv \left[\left(b_j, \beta_{ji}\right)_{l, m}\right]$$

$$\phi_2 \equiv \left[\left(a_{ji}, \alpha_{ji}\right)_{l+1, p_i}\right], \phi_4 \equiv \left[\left(b_j, \beta_{ji}\right)_{m+1, q_i}\right]$$

इन प्राचलों के समुच्चों का प्रयोग पूरे प्रपत्र में होगा और $\omega = \sqrt{-1}$ तथा

$$\theta(S) = \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j - \beta_j S) \prod_{j=1}^{l} \Gamma(1 - a_j + \alpha_j S)}{\sum_{i=1}^{r} \left[\prod_{j=m+1}^{q_i} \Gamma(1 - b_{j_i} + \beta_{j_i} S) \prod_{j=l+1} \Gamma(a_{j_i} - \alpha_{ji} S)\right.}$$

समाकलन (1.1) पूर्ण अभिसारी होता है, जब $|arg(z) < \frac{1}{2} B_i \pi \; (B_i > 0, A_i \leq 0)$ जहाँ

$$B_i = \sum_{j-1}^{l} \alpha_j - \sum_{j=l+1}^{p_i} \alpha_{ji} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j - \sum_{j=m_i+1}^{q_i} \beta_{i_i} \tag{1.3}$$

$$A = \sum_{i=1}^{p_i} \alpha_{i_i} - \sum_{j=1}^{q_i} \beta_{j_i}, \forall \quad i, \in \quad (1, \ldots.. r) \tag{1.4}$$

जहाँ Z शून्य के बराबर नहीं है, तथा रिक्त गुणनफल को इकाई रूप में लिया गया है। m, l, p_i, q_i पूर्णांक हैं जिनसे तुष्टि होती है। $1 \leq m \leq q_i$, $0 \leq l \leq p_i$, धन पूर्णांक हैं एवं प्राचल ऐसे हैं कि कोई पोल किसी पोल से संगमित नहीं होता, और कंटूर दाहिनी ओर स्थित पोल को बाईं ओर स्थित पोल से पृथक करता है। आगे सर्व संक्षेपण की दृष्टि से $\langle a + \left|{}^{a_1}_{a_2}\right| ; u \rangle$ के द्वारा प्राचल $(a + a_1 : u)$, $(a + a_2 : u)$ को प्रदर्शित किया जायेगा।

2. इस अनुभाग में हम निम्नलिखित ज्ञात[2] फल का प्रयोग करेंगे।

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi x)\, dx}{\Gamma(a+x)\, \Gamma(b-x)\, \Gamma(c+x)\, \Gamma(d-x)}$$

$$= \frac{\cos\left[\pi/2\ (b-a)\right]}{2\ \Gamma(a+b)/2\ \Gamma(c+d)/2\ \Gamma(a+d-1)}$$

जहाँ

$$\text{Re } (a+b+c+d) > 2, \quad a+c = b+d, \tag{2.1}$$

3. जिन समाकलों का मान ज्ञात किया जाना वे हैं–

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi x)\, I^{m,\,l}_{p_i,\, q_i+4:r}\left[Z \left| \begin{matrix} \phi_1, \phi_2 \\ \phi_3, \phi_4\ (1-\left|\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}\right| - x;\ u),\ (1-\left|\begin{matrix} b \\ d \end{matrix}\right| + x : u \end{matrix} \right.\right] dx$$

$$= \frac{\cos[\pi/2\ (b-a)]}{2}\ I^{m,\,l}_{p_i,\, q_i+3\,:\,r}$$

$$\left[Z \left| \begin{matrix} \phi_1, & \phi_2 \\ \phi_3 & \phi_4 \end{matrix}, \left(1-\left| \begin{matrix} (a+b)/2 \\ (c+d)/2 \end{matrix} \right|;\ u\right),\ (2-a-d:2\,u) \right.\right]$$

बशर्ते कि

$$u>0,\ R_e\ (a+b+c+d+4\,u)\left(b_{j_i} / \beta_{ji}\right) > 2, |arg z| < \frac{1}{2} A\pi,$$

$$j = \{1, 2 \ldots . m\}, \quad i = \{1, 2 \ldots .. r\} \tag{3.1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi x)\, I^{m,\,l}_{p_i+4,\, q_i:r}\left[Z \left| \begin{matrix} \phi_1, \phi_2 \\ (1-\left|\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}\right| + x;\ u),\ (\left|\begin{matrix} b \\ d \end{matrix}\right| - x' : u)\ \phi_3, \phi_4 \end{matrix} \right.\right] dx$$

$$= \frac{\cos[\pi/2\ (b-a)]}{2}\ I^{m,\,l}_{p_i+3,\, q_{i:}\ r}$$

$$\left[Z \left| \begin{matrix} \phi_1 \quad \phi_2 \\ \left(\left| \begin{matrix} (a+b)/2 \\ (c+d)/2 \end{matrix} \right|;\ u\right),\ (a+d-1:2\,u)\,\phi_3\ \phi_4 \end{matrix} \right.\right]$$

बशर्ते

$$u>0,\ R_e\ (a+b+c+d-4u)\left(b_{j_i} / \beta_{ji}\right) > 2, |\arg z| < \frac{1}{2}\pi A,$$

$j = \{1, 2 \ldots . m\}$, $i = \{1, 2 \ldots .. r\}$ A का अर्थ (1.4) में है (3.2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi x)\, I^{m,\,l}_{p_i+2,\, q_i+2:r}\left[Z \,\middle|\, \begin{matrix} \phi_1,\ \phi_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (1-a-x:u)\ (1-b+x:u)\ \ldots\ldots\ldots\ldots \phi_3,\ \phi_4,\ (c+x':u)\ (d-x:u) \end{matrix}\right] dx$$

$$= \frac{\cos[\pi/2\,(b-a)}{2\,\Gamma(a+d-1)}\, I^{m,\,l}_{p_i+1,\, q_i+1:r}\left[Z \,\middle|\, \begin{matrix} \phi_1,\ \phi_2 \ldots\ldots\ldots \\ (1-(a+b)/2\ :\ u),\ \phi_3,\ \phi_4,\ (c+d)/2:u) \end{matrix}\right]$$

बशर्ते कि

$$R_e\ (a+b+c+d)>2,\ |\arg z| < \frac{1}{2} A\ \pi \quad (3.3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi x)\, I^{m,\,l}_{p_i+2,\, q_i+2:r}\left[Z \,\middle|\, \begin{matrix} \phi_1,\ \phi_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (1-c-x:u)\ (1-d-x,u)\ \ldots\ldots\ldots\ldots \phi_3,\ \phi_4,\ (a+x:u)\ (b-x:u) \end{matrix}\right] dx$$

$$= \frac{\cos[\pi/2\,(b-a)}{2\,\Gamma(a+d-1)}\, I^{m,\,l}_{p_i+1,\, q_i+1:r}\left[Z \,\middle|\, \begin{matrix} \phi_1,\ \phi_2 \ldots\ldots\ldots \\ ((1-(c+d)/2\ :\ u),\ \phi_3,\ \phi_4\left(\frac{a+b}{2}:u\right) \end{matrix}\right]$$

बशर्ते कि

$$u>0,\ R_e\ (a+b+c+d)>2,\ |\arg z| < \frac{1}{2}\pi A \quad (3.4)$$

उपपत्ति : (3.1) की स्थापना के लिये इसके वाम पक्ष के समाकलन में आये एक संमिश्र वाले I-फलन को (1.2) के बल पर मेलिन-बार्नीज प्रकार के कंटूर समाकलन के रूप में व्यक्त करते हैं जो कि कथित प्रतिबंधों के अन्तर्गत वैध और पूर्णतया अभिसारी है, जिससे हमें निम्नांकित समाकलन की प्राप्ति होती है।

$$= \frac{1}{2\pi\omega} \int_{-\infty\omega}^{+\infty\omega} \theta(s) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi x)\, dx \;\; Z^s\, ds}{\Gamma(a+us+x)\,\Gamma(b+us-x)\,\Gamma(c+us+x)\,\Gamma(d+us-x)},$$

अब (1.1) की सहायता से आन्तरिक अनन्त समाकलन का मान निकालकर प्राप्त परिणाम की विवेचना (1.1) से करने पर (3.1) का दाहिना पक्ष प्राप्त होता है। इसी प्रकार अन्य परिणामों को ज्ञात कर सकते हैं।

4. विशिष्ट दशाएँ : इस अनुभाव में सभी समाकलनों को (जो अनुभाग 3 में प्राप्त किये गयें हैं) फाक्स-H एवं माइजर-G फलन में बदलेंगे।

(i) परिणाम (3.1) से (3.4) में मात्र $r=1$ रखने पर सभी ज्ञात[4] परिणाम H-फलन में बदल जाते हैं।

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi x)\, I^{m,\,l}_{p_i,\,q_i+4:1}\left[Z \,\middle|\, \begin{matrix} ((a_p\,.\,\alpha_p)) \\ ((b_q\,,\,\beta_q))\left(1-\left|\begin{matrix} a \\ c\end{matrix}\right|-x:u\right),\left(1-\left|\begin{matrix} b \\ d\end{matrix}\right|+x:u\right)\end{matrix} \right] dx$$

$$= \frac{\cos[\pi/2\,(b-a)]}{2}\, H^{m,\,l}_{p,\,q+3}\left[Z \,\middle|\, \begin{matrix} ((a_p\,.\,\alpha_p)) \\ ((b_q\,,\,\beta_q))\left(1-\left|\begin{matrix} (a+b)/2 \\ (c+d)/2\end{matrix}\right|:u\right),(2-a-d;2u)\end{matrix} \right]$$

बशर्ते कि $u > 0$,

$$R_e\,(a+b+c+d+4u\left(b_i/\beta_j\right)) > 2\,,\; j = 1.2\,....\,m,$$

$$|\arg z| < \frac{1}{2}\pi A \qquad (4.1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi x)\, I^{m,\,l}_{p_i,\,+4,\,q_i:1}\left[Z \middle| \begin{matrix} \phi_1,\ \phi_2 \\ \left(\left|\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}\right| + x : u\right),\ \left(\left|\begin{matrix} b \\ d \end{matrix}\right| - x : u\right)\phi_3,\ \phi_4 \end{matrix} \right] dx$$

$$= \frac{\cos[\pi/2\,(b-a)]}{2}\, H^{m,\,l}_{p+3,\,q}\left[Z \middle| \begin{matrix} ((a_p \cdot \alpha_p)) \\ \left(\left|\begin{matrix} (a+b)/2 \\ (c+d)/2 \end{matrix}\right| : u\right), (a+d-1\,;\,2u)\,;\,((b_q,\ \beta_q)) \end{matrix} \right]$$

बशर्ते कि u> 0

$$R_e\ (a+b+c+d-4u\left(b_i/\beta_j\right)) > 2\,,\ j = 1.2 \ldots .m,$$

$$|\arg z| < \frac{1}{2}\,\pi\, A \qquad (4.2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi x)\, I^{m,\,l}_{p_i+2,\,q_i+2:1}\left[Z \middle| \begin{matrix} \phi_1,\ \ \phi_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (1-a-x:u)\ (1-b+x:u)\ \phi_3,\ \ \phi_4\ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (c+x:u)\ (d-x:u) \end{matrix} \right] dx$$

$$= \frac{\cos[\pi/2\,(b-a)]}{2\,\Gamma(a+d-1)}\, H^{m,\,l}_{p+1,\,q+1}\left[Z \middle| \begin{matrix} \phi_1,\ \phi_2 \\ (1-(a+b)/2:u)\left(b_q \cdot \beta_q\right),\ (c+d)/2\ :\ u \end{matrix} \right]$$

बशर्ते कि u> 0,

$$R_e\ (a+b+c+d) > 2\ \ |\arg z| < \frac{1}{2}\,\pi\, A, \qquad (4.3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi x)\, I^{m,\,l}_{p_i+2,\,q_i+2\,:\,1}\left[Z \middle| \begin{matrix} \phi_1,\ \ \phi_2 \\ (1-c-x:u)\ (1-d-x:u)\ \phi_3 \cdot \phi_4\ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (a+x:u)\ (b+x:u) \end{matrix} \right] dx$$

$$= \frac{\cos[\pi/2\,(b-a)]}{2\,\Gamma\,(a+d-1)}\, H^{m,\,l}_{p+1,\,q+1}\left[Z \left| \begin{matrix} \phi_1,\ \phi_2 \\ ((a+b)/2 : u)\,\left(\left(b_q \cdot \beta_q\right),\ (1-c+d)/2\ :\ u\right) \end{matrix} \right. \right]$$

बशर्ते कि

$$u > 0, R_e\ (a+b+c+d) > 2\ |arg z| < \frac{1}{2}\,\pi\,A, \tag{4.4}$$

इसी प्रकार इन परिणामों को G फलन में बदला जा सकता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

इस शोधपत्र के दौरान प्रोत्साहन देने के लिए मैं एस० ए० एल० जैन कॉलेज के प्राचार्य डॉ० एम० के० जैन एवं एस० ए० टी० आई० के० डॉ० आर० डी० अग्रवाल का आभारी हूँ।

निर्देश

1. आनन्दानी, पी० तथा रोंघे, ए० के० : विज्ञान परि० अनु० पत्रिका, 1987, 30(1), 13-16
2. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि : Table of Integral Transform, भाग-2 मैक्ग्राहिल न्यू० 1954 पृष्ठ 200
3. फाक्स, सी० : अमेरिकन मैथ० सोसा० 1961, 98, 395-429.
4. रोंघे, ए० के० : पी-एच० डी० थीसिस हरकतउलाह विश्व० भोपाल 1993
5. रोंघे, ए० के० : Mathematical Moter, Argentina 1995-96, **38**, 95-99
6. वैश्य, सी० डी०, जैन, रेनू तथा वर्मा, आर० सी० : प्रोसी नेश० एके० साइं० इंडिया, 1989, 59A, 366-375
7. सक्सेना, बी० पी० : प्रोसी० नेश० एके० साइं० इंडिया, 1982, 52A, 366-75.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 44, No. 1, January 2001

Cu(II) संकुल यौगिकों का संश्लेषण, अभिलक्षणन एवं ई. एस. आर. अध्ययन

ए० पी० मिश्र, वी० के० तिवारी रश्मि सिंघई तथा एस० के० गौतम
अकार्बनिक प्रयोगशाला, रसायन शास्त्र विभाग,
डॉ० हरीसिंह गौर विश्वविद्यालय, सागर (म० प्र०)

[प्राप्त जुलाई 2, 2000]

सारांश

शिफ क्षार के धातु संकुल अपने जैवकीय तथा औद्योगिक महत्व के लिए जाने जाते हैं। बेन्जोफीनोन-4-एनिसिडीन (Cu-BA) तथा बेन्जोफीनोन-3-नाइट्रो एनिलीन (Cu-BNA) के साथ कॉपर के कुछ संकुलों को संश्लेषित करके तात्विक विश्लेषण, अवरक्त स्पेक्ट्रम तथा पराबैंगनी दृश्य स्पेक्ट्रम, चालकता एवं चुम्बकीय अध्ययनों के द्वारा उनकी पहचान की गई है। संकुल गहरे रंगीन और प्रकृति में विद्युत अनपघट्य हैं। धातु और शिफ क्षार का अनुपात 1 : 2 है। शिफ क्षार एकदन्ती (monodentate) तथा उदासीन लिगैण्ड की तरह आचरण करता है। संकुलों की ज्यामिति विकृति वर्ग समतलीय है जो शिफ क्षार लिगैण्ड की स्थूल प्रकृति के कारण हो सकता है। Cu-BNA संकुल के चुम्बकीय आघूर्ण का मान सामान्य से कम है, जिसका कारण Cu-Cu की अन्योन्यक्रिया हो सकती है। इन संकुलों के लिये ESR परिमापों जैसे g_{11}, $g_{\perp}$, g_{av}, G, Δg को परिकलित किया जाता है। संकुलों का ESR स्पक्ट्राशिखरों के लोरेंट्जियन प्रकार को प्रदर्शित करता है। संकुल के लिये ESR स्पेक्ट्रम दीर्घित चतुष्कोणीय (distortedtetragonal) संरचना बताता है, जिसकी आद्य अवस्था (ground state) $d_{x^2-y^2}$ है।

Abstract

Synthesis, characterization and ESR study of Cu(II) complexes. *By* A. P. Mishra, V. K. Tiwari, Rashmi Singhai and S. K. Gautam, Inorganic Research Labs, Department of Chemistry, H. S. Gour University, Sagar (M. P.).

Schiff-base metal complexes are known for their biological and industrial importance. Complexes of Cu(II) with benzophenone-4-anisidine (BA) and benzopheneone-3-nitroaniline (BNA), have been synthesized and characterized by elemental, IR and UV-Vis spectral, conductance and magnetic measurements. Complexes are dark coloured and non-electrolytic in nature. The metal to ligand ratio is 1 : 2. Schiff-base behaves as monodentate meutral ligand. The geometry of complex is distorted square-planar. The magnetic moment's value of Cu-BNA complex is less than normal which may be due to mutual interaction between Cu-Cu. ESR parameters viz. g_{11}, $g_{\perp}$, g_{av}, G, Δg have also been calculated. The peaks of ESR spectra are of Lorentzian pattern. The ESR spectra suggest an elongated tetragonmal structure with ground state $d_{x^2-y^2}$.

शिफ क्षार के धातु संकुलों का विस्तार से अध्ययन किया गया है क्योंकि इन संकुल यौगिकों का औद्योगिक तथा जैविकीय क्षेत्र में अत्यधिक महत्व है[1-3]। कुछ नये प्रकार के शिफ क्षारों के संश्लेषण में संरचनात्मक अध्ययन की ओर जीववैज्ञानिकों का ध्यान आकृष्ट हुआ है। फीनोन और एमीनों के कतिपय प्रकाशरासायनिक और औषधीय गुणों को प्रतिवेदित किया जा चुका है। साहित्य के सर्वेक्षण[4-6] से इस विषय पर लेखक को आगे शोध करने की प्रेरणा मिली है। प्रस्तुत शोध का लक्ष्य धातु संकुलों की संरचना का अध्ययन करना है।

प्रयोगात्मक

शिफ क्षारों को बेन्जोफीनोन के मीथेनालिक विलयन में 4-एनिसिडीन/3-नाइट्रोएनिलीन के मीथेनालिक विलयन को 1:1 को मोलर अनुपात में मिलाते हैं। इस मिश्रण को जल उष्मक पर 4-5 घंटे तक गर्म करते हैं। प्राप्त शिफ क्षार को मीथेनाल और ईथर से पुनः प्रक्षालित करते हैं।

धातु लवण के मीथेनालिक विलयन के साथ शिफ क्षार के मीथेनालिक विलयन को 1:2 के अनुपात में मिलाते हैं। इस मिश्रण को जल ऊष्मक पर लगभग 3-4 घंटे तक गर्म करते हैं। शीतलन के उपरान्त प्राप्त रंगीन अवक्षेप को छानकर जलशोषक में निर्जल कैल्सियम क्लोराइड पर तथा विद्युतओवेन में 70° पर सुखाते हैं। ये संकर यौगिक वायु में स्थायी तथा कार्बनिक विलायक ऐल्कोहल, ऐसीटोन और डाइमेथाइल फार्मामाइड में विलेय है'।

परिणाम तथा विवेचना

धातु संकुलों के वैश्लेषिक आँकडे सूचित करते हैं कि धातु और लिगैण्ड का अनुपात 1:2 है। संकुलों की मीथेनाल में आणविक चालकता का मान क्रमशः 22.8 और 18.6 $ohm^{-1}\ cm^2 mol^{-1}$ है जो संकुलों की विद्युतअनपघट्य प्रकृति के पक्ष में हैं। शिफ क्षार लिगैण्ड के $\nu_{C=N}$ बैण्ड 1630 ±10cm^{-1} पर प्राप्त होते हैं। किलेटीकरण के पश्चात् यह बैण्ड निम्न आवृत्ति क्षेत्र में पहुँचता है जो इस समूह की किलेटीकरण में भागीदारी दर्शाता है।

संकुलों के स्पेक्ट्रम में $3420 \pm 20\ cm^{-1}$ पर एक अवशोषण बैण्ड प्राप्त होता है, जिसका कारण सममिति और असममिति –OH तनन विधा (mode) को माना गया है। सहसंयोजित जल के सम्बन्ध में कोई साक्ष्य अभिलेखित नहीं है। धातु संकर यौगिकों में कुछ नये बन्ध $420 \pm 10\ cm^{-1}$ तथा $310 \pm 10\ cm^{-1}$ पर प्राप्त होते हैं जो $\nu_{M\text{-}N}$ तथा $\nu_{M\text{-}Cl}$[4-6] विधा को दर्शाते हैं।

Cu-BA संकुल के इलेक्ट्रानिक स्पेक्ट्रम में दो विस्तृत आकार के बैण्ड क्रमशः $13513\ cm^{-1}$ तथा $19230\ cm^{-1}$ पर प्राप्त होते हैं जो संक्रमणों $^2B_{ig}$ - $^2B_{2g}$ तथा $^2B_{1g}$ - ^2E_g के अनुरूप हैं।

Cu II- संकुल के लिये μ_{eff} का मान 1.73 BM है। Cu(II) BA संकुल की नियमित ज्यामिति में कुछ विकृति प्रदर्शित होती है जो लिगैण्ड के स्थूल तथा Cu-Cu की अन्योन्य क्रिया के कारण होती है[6-8]।

Cu-BNA संकुल के इलेक्ट्रानिक स्पेक्ट्रम में एक बैण्ड $13157\ cm^{-1}$ तथा दूसरा $18867\ cm^{-1}$ पर प्राप्त होता है जो एक प्रबल आवेश स्थानान्तरण बैण्ड द्वारा अतिछादित (Overlapped) है, तथा संक्रमणों $^2B_{1g}$- $^2B_{2g}$ एवं $^2B_{ig}$ - ^2E_g को निर्दिष्ट करते हैं। इस कॉपर संकुल के लिये चुम्बकीय आघूर्ण का अपेक्षाकृत न्यूनतम मान (1.65BM) Cu-Cu की अन्योन्य क्रिया को दर्शाता है। दोनों संकुलों के लिये विकृत वर्ग समतलीय ज्यामिति सुझाई गई है[4-8]

कॉपर संकुलों का ESR स्पेक्ट्रम ठोस अवस्था में 30^oC एवं X-बैण्ड पर अभिलेखित किया गया है जो 9.5GHz आवृत्ति तथा चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता 2000 ± 2000 गास पर समायोजित है। संकुलों का ESR स्पेक्ट्रम लोरेन्ट्जियन प्रकार के शिखरों को प्रदर्शित करता है। संकुलों के ESR परिणामों को सारणी 2 में दर्शाया गया है। दोनों संकुलों में g_{11} के मान धातु और लिगैण्ड के बीच सहसंयोजक लक्षण की व्यापकता को दर्शाते हैं। अक्षीय सममिति परिमाप G का नाम 4 से कम अर्थात् < 2 है, जो ठोस अवस्था में कॉपर केन्द्रकों के बीच अन्योन्य क्रिया को सूचित करता है। इस संकुल में G का मान लिगैण्ड के माध्यम अथवा प्रबल क्षेत्र प्रकृति को सूचित करता है। g_{11} और $g_{\perp}$ के बीच अन्तर की माप को एनिसोट्रोपी परिमाप के रूप में लिया गया है। Cu(II)-BNA संकुल के लिये तीन प्रेक्षित मान $g_x \neq g_y \neq g_z$ हैं जो सिद्धांततः संकुल की चतुर्भुजीय सममिति (Rhombic Symmetry) को दर्शाता है। Cu-(ii)BA संकुल में $G_{11} > g_1 > 2$ का सहसम्बन्ध (Correlation) दीर्घित चतुष्कोणीय (Tetragonally elongated) अथवा वर्ग समतलीय ज्यामिति का सुझाव देता है जिसकी आद्य अवस्था $d_{x^2-y^2}$ है।

संक्रमण धातु संकुल में g के मान का 2.0023 से विस्थापन धातु कक्षकों को चक्रण कक्षा युग्मन, जिसमें अयुग्मित इलेक्ट्रान वाले आण्विक कक्षक समाहित होते हैं, रिक्त अथवा पूर्ण लिगैण्ड कक्षकों के संकरण के कारण होता है। जब संकरण रिक्त लिगैण्ड कक्षकों के साथ होता है तब g

सारणी - 1 : यौगिकों के वैश्लेषिक तथा चुम्बकीय आँकडे

क्रमांक	आणविक सूत्र (रंग)	अणुभार (गणनांक बिन्दु)	तत्व विश्लेषण % प्राप्त (गणनात्मक)				μ_{eff} (B. M.)	λ omh^{-1} cm^{2} mol^{-1}
			C	H	N	M		
1.	$C_{20}H_{16}NO$ श्यामाभ क्रिस्टलीय	286 (75)	82.63 (83.91)	5.42 (5.59)	4.76 (4.89)	–	–	–
2.	Cu(II) – (BA) [$Cu(C_2OH_{16}NO)_2Cl_{12}$]. H_2O (श्याम)	724.5 (145)	65.02 (65.21)	4.57 (4.60)	3.75 (3.52)	8.24 (8.30)	1.73	22.8
3.	$C_{19}H_{14}N_2O_2$ (गंदा पीत)	302 (70)	71.02 (72.15)	4.42 (4,43)	12.82 (13.29)	–	–	–
4.	Cu(II) – (BNA) [$Cu_2(C_{19}H_{14}N_2O_2)_4Cl_4$] . $2H_2O$ (जैतूनी हरा)	1513 (110)	59.43 (60.27)	3.92 (3.96)	7.23 (7.40)	7.97 (8.39)	1.65	18.8

(BA) = Benzo phenone-4- anisidine

(BNA) = Benzophenone-3-nitroaniline

सारणी - 2 : कॉपर II यौगिकों के इलेक्ट्रान चक्रण अनुनाद परिमाप

S.No.	धातु संकुल	g_{11}	$g_{\perp}$	g_{av}	G	g_{11}-$g_{\perp}$ = Δg
1.	Cu (II)-(BA) संकुल	2.19784	2.11542	2.14289	1.71404	0.08242
2.	Cu(II)- (BNA) संकुल	gz = 2.10690	gy = 2.0644 gx = 2.0254	2.0656	1.65993	0.06200

विस्थापन नकारात्मक होता है तथा जब संकरण भरे हुए लिगैण्ड कक्षकों के साथ होता है तो g विस्थापन धनात्मक होता है। इन दोनों संकुलों के लिये g विस्थापन का मान धनात्मक है। g विस्थापन के मान की मात्रा लिगैण्ड के दाता स्थानों (donor site) पर अयुग्मित इलेक्ट्रानों के घनत्व पर निर्भर करती है अर्थात् संकुल के सहसंयोजक मात्रा पर। Cu-II-BNA[6-8, 10] संकुल के ESR शिखरों के विपाटन A_{11} तथा $A_{\perp}$ के मान क्रमशः 92.5G तथा 30.5G हैं।

शिखरों का विपाटन तथा A के मान कॉपर आयन के अयुग्मित इलेक्ट्रानों का लिगैण्ड परमाणु कक्षकों में प्रभावी अस्थानीकरण (delocalization) प्रदर्शित करते हैं [6,11-13]।

निर्देश

1. सिन, ई. तथा हेरिस, सी. एम. : ओआर्डिनेशन केम. रिव्यू, 1969, 4, 391

2. हुग्स, एम. एन. : इनआर्गनिक कैमिस्ट्री ऑफ बायोलोजिकल प्रेसेसेज, जान विले (1981).

3. विलकिन्सन, जी. : कम्प्रेहेन्सिव कोआर्डिनेशन केमिस्ट्री, भाग 6 पर्गामान प्रेस यू. के. (1987).

4. जेन्सन, एच. पी. : इण्डियन जर्नल ऑफ केमिस्ट्री, 1984, 23-A, 475.

5. श्यामल, ए. तथा वारीनियाजी, एम. ए : सिन्थेसिस रिएक्टिवटी इन आर्गनिक मेट-आर्ग. केमिस्ट्री, 1985, 15, 805.

6. दत्ता, आर. एन. तथा श्यामल, ए. : एलीमेन्टस ऑफ मैग्नीटोकेमिस्ट्री एफिलियेटेड ईस्ट-वेस्ट, दिल्ली 1993, 82, 123, 150, 157.

7. लीवर, ए. बी. पी. : इलेक्ट्रानिक स्पेक्ट्रोस्कोपी, द्वितीय संस्करण, एल्सेवियर, अमस्टरडम (1984)

8. अब्रागम, ए. तथा ब्लेने, बी. : इलेक्ट्रान पैरामैग्नेटिक रेजोनेन्स आफ ट्रान्जीशन मेटल आयन, आक्सफोर्ड यूनिवर्सिटी प्रेस (1970)

9. खान, आई. यू., श्रीवास्तव, एस. के. तथा श्रीवास्तव, एस. सी. : इण्डियन जर्नल ऑफ केमिस्ट्री, 1987, 26-A, 238

10. इस्फाक, पी. बी. : इलेक्ट्रान स्पिन रिसोनेन्स इन केमिस्ट्री, बर्नस तथा नोबल, न्यूयार्क (1967).

11. योकोई, एच. तथा इसोवे, टी. : बुल. केमि. सोसायटी, जापान, 1969, 42. 2187.

12. ब्राउन, डी. आर. तथा वेस्ट, डी. एक्स., जर्नल ऑफ इनआर्गनिक न्यूक्लियर केमिस्ट्री, 1981, 43, 1017.

13. जेजिरस्का, जे., पालीहिड्रान, 1987, 6, 1969.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 44, No. 1, January. 2001

ली-समूह सिद्धान्त द्वारा द्विलाम्बिक बहुपद के लिए जनक फलन

आर० के० कुम्भट तथा कु० सीमा सिंहल
गणित तथा सांख्यिकी विभाग, जे० एन० वी० विश्वविद्यालय, जोधपुर (राजस्थान)

[प्राप्त - मई 24, 2000]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य कानहाउजर द्वारा परिभाषित द्विलाम्बिक बहुपद के लिए ली-समूह की वाइज़्नर विधि का उपयोग करते हुए जनक फलन प्राप्त करना है।

Abstract

Generating function for biorthogonal polynomial by lie group theory. *By* R. K. Kumbhat and (Miss) Seema Singhal, Department of Mathematics and Statistics, J. N. V. University, Jodhpur (Raj.).

The object of the present paper is to obtain generating functions for biorthgonal polynomial defined by Konhauser, using Weisner method of lie group.

1. प्रस्तावना

सन्निकटन सिद्धान्त पंक्ति समस्या कूटन तथा सम्प्रयुक्त गणित की अन्य शाखाओं में जहाँ बहुपद फलन वेट फलन (Weight function) के रूप में रहते हैं, लाम्बिक बहुपदों की महत्वपूर्ण भूमिका है।

कानहाउजर ने[3] 1967 में nवीं कोटि के द्विलाम्बिक बहुपद $Z_n^{\alpha}(x, k)$ की परिभाषा इस प्रकार दी–

$$Z_n^{\alpha}(x, k) = \frac{\Gamma(kn + \alpha + 1)}{n!} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \frac{x^{kj}}{\Gamma((kj + \alpha + 1)}, \; Re(\alpha) > 1$$

$$= \frac{(1+\alpha)_{kn}}{n!} \sum_{j=0}^{n} \frac{(-n)}{j!} \frac{x^{kj}}{k^{kj}\left(\frac{1+\alpha}{k}\right)_j \left(\frac{2+\alpha}{k}\right)_j \cdots \left(\frac{k+\alpha}{k}\right)_j}$$

$$= \frac{(1+\alpha)_{kn}}{k} \, {}_1F_k\left[-n; \frac{1+\alpha}{k} \frac{2+\alpha}{k}, \ldots \frac{k+\alpha}{k}; \left(\frac{x}{k}\right)^k\right] \tag{1.1}$$

बाद में अन्य शोधकर्ताओं ने[1, 2, 6, 7, 8, 10, 11] जनक फलन, पुनरावृत्ति सम्बन्ध तथा बहुपद $Z_n^\alpha(x, k)$ की लाम्बिकता के लिए अध्ययन किया है।

अवकलन समीकरण

द्विलाम्बिक बहुपद $Z_n^\alpha(x, k)$ का रैखिक अवकलन समीकरण जिसे कानहाउजर ने[3] परिभाषित किया है निम्नवत् है-

$$x \frac{d^2}{dx^2} Z_n^\alpha(x, k) + (1+\alpha-x) \frac{d}{dx} Z_n^\alpha(x, k) + (kn-k+1) Z_n^\alpha(x, k) = 0 \tag{1.2}$$

जहाँ $\alpha > -1$ तथा k धन पूर्णांक है।

पुनरावृत्ति सम्बन्ध

बहुपद $Z_n^\alpha(x, k)$ से निम्नांकित अवकल पुनरावृत्ति सम्बन्धों की तुष्टि होती है जहाँ कि नीचे लिखे अंक ऋण पूर्णांक हैं-

$$\frac{d}{dx}\left[Z_n^\alpha(x, k)\right] = \frac{1}{x}\left[(kn+\alpha) Z_n^{\alpha-1}(x, k) - \alpha Z_n^\alpha(x, k)\right] \tag{1.3}$$

$$\frac{d}{dx}\left[Z_n^\alpha(x, k)\right] = \left[Z_n^\alpha(x, k) - Z_n^{\alpha-1}(x, k)\right] \tag{1.4}$$

2. आपरेटरों का समूह

$\frac{d}{dx}$ के गुणांक में प्राचल को रेखीय अवकलन समीकरण (1.2) में $y\frac{\partial}{\partial y}$ द्वारा प्रतिस्थापित करने

पर आंशिक अवकलन समीकरण

$$Z = x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + y\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + (1 - x)\frac{\partial}{\partial x} + (kn - k + 1),\quad Z = Z_n^{\alpha}(x,\ k) \tag{2.1}$$

निर्मित होता है।

द्विलाम्बिक बहुपदों के लिए हमने निम्नांकित प्रथम कोटि के अवकलन आपरेटरों B तथा C को इस तरह परिभाषित किया जिससे कि

$$B\left[\, Z_n^{\alpha}(x,\ k)\,y^{n} \right] = b_n\, Z_n^{\alpha-1}(x\,,\ k)\,y^{\alpha-1} \tag{2.2}$$

$$C\left[\, Z_n^{\alpha}(x,\ k)\,y^{n} \right] = c_n\, Z_n^{\alpha+1}(x\,,\ k)\,y^{\alpha+1} \tag{2.3}$$

(2.2) की उपपत्ति : माना

$$B = B_1(x\,,\ y)\,\frac{\partial}{\partial x} + B_2(x\,,\ y)\,\frac{\partial}{\partial y} + B_0(x\,,\ y) \tag{2.4}$$

अथवा

$$B\left[\, Z_n^{\alpha}(x,\ k)\,y^{\alpha} \right] = B_1\frac{\partial}{\partial x}\left[\, Z_n^{\alpha}(x,\ k)\,y^{n} \right] + B_2\frac{\partial}{\partial y}\left[\, Z_n^{\alpha}(x,\ k)\,y^{n} \right]$$

$$+\ B_0\left[\, Z_n^{\alpha}(x,\ k)\,y^{\alpha} \right] \tag{2,5}$$

(2.5) में (1.3) को व्यवहृत करने पर

$$B\left[\, Z_n^{\alpha}(x,\ k)\,y^{\alpha} \right] = B_1\,y^{\alpha}\,\frac{1}{x}\left[\,(kn + \alpha)\,Z_n^{\alpha-1}(x,\ k) - \alpha\, Z_n^{\alpha}(x,\ k) \right]$$

$$+\ \alpha\, B_2\, Z_n^{\alpha}(x,\ k)\,y^{\alpha-1} + B_0\, Z_n^{\alpha}(x,\ k)\,y^{\alpha}$$

$B_1 = x\,y^{-1}\ .\ B_2 = 1$ तथा $B_0 = 0$ का चुनाव करने पर

$$\therefore \qquad B = xy^{-1}\,\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \tag{2.6}$$

तथा

$$B\left[Z_n^{\alpha}(x, k)y^{\alpha}\right] = (kn + \alpha) Z_n^{\alpha - 1}(x, k)y^{\alpha - 1} \tag{2.7}$$

आपरेटर B उत्तरोत्तर सम्प्रयोग से

$$B^{\rho}\left[Z_n^{\alpha}(x, k)y^{\alpha}\right] = \frac{(kn + \alpha)!}{(kn + \alpha - \rho)!} Z_n^{\alpha - \rho}(x, k)y^{\alpha - \rho} \tag{2.8}$$

(2.3) की उपपत्ति : माना

$$C = C_1(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + C_2(x, y)\frac{\partial}{\partial y} + C_0(x, y) \tag{2.9}$$

अथवा

$$C\left[Z_n^{\alpha}(x, k)y^{\alpha}\right] = C_1\frac{\partial}{\partial x}\left[Z_n^{\alpha}(x, k)y^{\alpha}\right] + C_2\frac{\partial}{\partial y}\left[Z_n^{\alpha}(x, k)y^{\alpha}\right]$$

$$+ C_0\left[Z_n^{\alpha}(x, k)y^{\alpha}\right] \tag{2.10}$$

(2.10) में (1.4) को व्यवहृत करने पर

$$C\left[Z_n^{\alpha}(x, k)y^{\alpha}\right] = y^{\alpha} C_1\left[Z_n^{\alpha}(x, k) - Z_n^{\alpha+1}(x, k)\right]$$

$$+ \alpha C_2 Z_n^{\alpha}(x, k)y^{\alpha - 1} + C_0 Z_n^{\alpha}(x, k)y^{\alpha} \tag{2,10}$$

$C_1 = y,\ C_2 = 0,\ C_0 = -y$ चुनने पर

$$\therefore \qquad C = y\frac{\partial}{\partial x} - y \tag{2.11}$$

तथा

$$C\left[Z_n^{\alpha}(x, k)y^{\alpha}\right] = (-1)Z_n^{\alpha+1}(x, k)y^{\alpha+1} \tag{2.12}$$

आपरेटर C का उत्तरोत्तर सम्प्रयोग करने पर

$$C^{\rho}\left[Z_n^{\alpha}(x,\ k)\, y^{\alpha} \right] = (-1)^{\rho} Z_n^{\alpha+\rho}(x,\ k)\, y^{\alpha+\rho} \tag{2.13}$$

प्रथम कोटि का रैखिक अंवकल आपरेटर

$$A = y\frac{\partial}{\partial y}$$

$$B = xy^{-1}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$$

$$C = y\frac{\partial}{\partial x} - y \tag{2.14}$$

निम्नलिखित संबंधों को तुष्ट करते हैं-

$$[A,\ B] = AB - BA = -B$$

$$[A,\ C] = AC - CA = C$$

$$[C,\ B] = CB - BC = -1 \tag{2.15}$$

क्रम विनिमयक सम्बन्ध दर्शाता है कि द्विलाम्बिक बहुपद $Z_{\alpha}^{n}(x, k)$ क्रम विनिमय करता है A, B तथा C आपरेटरों से। हम आपरेटर B तथा C में से प्रत्येक से जनित विस्तारित रूप वाले ग्रुप को निम्नवत् व्यक्त करते हैं-

$$\exp(bB)f(x,\ y) = f[x(y+b)/y, y+b] \tag{2.16}$$

$$\exp(cC)f(x,\ y) = \exp(-cy)f[(x+cy), y] \tag{2.17}$$

$$\exp(cC)\,[\exp(bB)f(x,\ y)]$$

$$= \exp[-c(y+b)]f[x+cy)(y+b)/y,\ y+b] \tag{2.18}$$

3. जनक फलन

चूँकि $Z_n^{\alpha}(x,\ k)y^{\alpha}$ हल है तंत्र Zu = 0, का अतः हम निम्नांकित तीन दशाओं पर विचार करते हुए जनक फलन निर्धारित करते हैं।

दशा I: $b=1,\ c=0$

दशा II: $b=0,\ c=1$

दशा III: $bc \neq 0$

दशा-I

$b = 1, c = 0$, के लिए (2.16) से

$$\exp(B)f(x, y) = f[x(y+1)/y,\ y+1]$$

$f(x, y) = Z_n^\alpha(x, k)y^\alpha$ रखने पर

$$\exp(B)\left[Z_n^\alpha(x, k)y^\alpha\right] = (y+1)^\alpha\ Z_n^\alpha[x(y+1)/y,\ k]$$

$$\exp(B)Z_n^\alpha(x, k) = (1+t)^\alpha\ Z_n^\alpha[x(1+t)k]$$

जहाँ $t = \dfrac{1}{y}$

अथवा $(1+t)^\alpha\ Z_n^\alpha[x(1+t)k] = \left[1 + B + \dfrac{B^2}{2!} + \ldots + \dfrac{B^n}{n!} + \ldots\infty\right]Z_n^\alpha(x, k)\ \dfrac{y^\alpha}{y^n}$ (3.1)

(3.1) में (2.8) का उपयोग करने पर

$$(1+t)^\alpha\ Z_n^\alpha[x(1+t),\ k] = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(kn+\alpha)!\ Z_n^{\alpha-p}(x, k)t^p}{p!(kn+\alpha\quad p)!} \tag{3.2}$$

जो प्रथम जनक फलन है।

दशा-II

(2.17) से $b=0, c=1$, के लिए

$$\exp(C)f(x, y) = \exp(-y)f(x+y,\ y)$$

$f(x, y) = Z_n^\alpha(x, k)y^\alpha$ रखने पर

$$\exp(C) Z_n^{\alpha}(x, k) y^{\alpha} = y^{\alpha} \exp(-y) Z_n^{\alpha}(x + y, k)$$

$y = -t$ रखें तो

$$\exp(C) Z_n^{\alpha}(x, k) = \exp(t) Z_n^{\alpha}(x - t, k)$$

अथवा

$$\exp(t) Z_n^{\alpha}(x - t, k) = \left[1 + C + \frac{C^2}{2!} + \ldots + \frac{C^n}{n!} + \ldots \infty\right] Z_n^{\alpha}(x, k) \tag{3.3}$$

(3.3) में (2.13) का उपयोग करने पर

$$\exp(t) Z_n^{\alpha}(x - t, k) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{Z_n^{\alpha+p}(x, k)}{p!} t^p \tag{3.4}$$

जो द्वितीय जनक फलन है।

दशा - III

(2.18) से $bc \neq 0,\ b = \omega,\ c = l$ के लिए

$$\exp(C)[\exp(\omega B) f(x, y)] = \exp[-(y + \omega)] f[(x + y)(y + \omega)/y,\ y + \omega]$$

$f(x, y) = Z_n^{\alpha}(x, k) y^{\alpha}$ रखने पर

$$\exp(C)[\exp(\omega B) Z_n^{\alpha}(x, k) y^{\alpha}] = \exp[-(y + \omega)] Z_n^{\alpha}[(x + y)(y + \omega)/y,\ k](y + \omega)^{\alpha}$$

$\frac{1}{y} = t$ रखें तो

$$\exp(C)[\exp(\omega B) Z_n^{\alpha}(x, k)]$$

$$= \exp\left[-\frac{(1 + \omega t)}{t}\right] Z_n^{\alpha}\left[\frac{(1 + xt)(1 + \omega t)}{t},\ k\right](1 + \omega t)^{\alpha} \tag{3.5}$$

(2.8) का उपयोग करने पर-

$$(1 + \omega t)^{\alpha} Z_n^{\alpha}[(1 + xt)(1 + \omega t)/t,\ k]$$

$$= \exp(1 + \omega t) \exp\left(\frac{1}{t}\right) \exp(C)\left[\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(kn + \alpha)!\, Z_n^{\alpha-p}(x, k)\, t^p \omega^p}{p!\,(kn + \alpha - p)!}\right]$$

(2.13) का उपयोग करने पर

$$(1 + \omega t)^{\alpha} Z_n^{\alpha} [(1 + xt)(1 + \omega t)/t, k] = \exp(1 + \omega t) \exp\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$\times \left[\sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^q (kn + \alpha)! \, Z_n^{\alpha - p - q}(x, k) \, t^{p-q} \omega^p}{q! \, p! \, (kn + \alpha - p)!}\right] \qquad (3.6)$$

यह तीसरा जनक फलन है।

निर्देश

1. कार्लिट्ज, एल. : Pacific J. Math. 1968, 24, 425-430
2. चण्डी, टी. डब्लू. : Quar. J. Math. 1943, 14, 55-78
3. कानहाउजर, जे. डी. ई. : Pacific J. Math. 1967, 21, 303-314,
4. मकब्राइड, ई. बी. : Obtaining Generating Functions, Springer-Verlag, New York. (1971).
5. मिलर, डब्लू. : Lie theory and special functions, Academic Press, New York. (1968)
6. पठान, एम. ए. गोयल, ए. एन. तथा शाहवन, एम. जे. एस. : Bull. Math. Soc. Sc. Math. Roumanic Tom 1997, 40 (88) No. 3-4
7. वही : Reports on Mathematical Physics. 1997, 39.
8. प्रभाकर, टी. के. : Pacific J. Math, 1970, 35, 213-219
9. रेनविले, ई. डी. : Special functions, MacMillan Co., New York, (1960)
10. श्रीवास्तव, एच. एम. : Pacific J Math. 1973, 49, 489-492
11. वही : Pacific J. Math. 1982, 98, 235-250.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 44, No. 1, January, 2001.

दक्षिण राजस्थान के आदिवासियों की वनस्पतियों पर निर्भरता

सतीश कुमार शर्मा
क्षेत्रीय वन अधिकारी (नाहरगढ़ जैविक उद्यान)
2, सुरेश नगर, दुर्गापुरा, जयपुर (राज.)

[प्राप्त - 10 मई, 2000]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में विभिन्न कार्यों हेतु दक्षिण राजस्थान के आदिवासियों की पौधों पर निर्भरता का विवरण प्रस्तुत किया गया है। इस तरह 106 नृवनस्पतीय महत्व के पौधों की जानकारी दी गई है।

Abstract

Dependency of the tribals of Southern Rajasthan on plants. *By* Satish Kumar Sharma, Range Forest Officer, (Nahargarh Biological Park), 2, Suresh Nagar, Durgapura, Jaipur (Raj.).

In present paper, an account has been given about the dependenxy of the tribals of Southern Rajasthan on plants. As many as 106 plants have been listed which are important from ethnobotanical point of view.

आदिवासियों का पौधों एवं वनों से चोली-दामन का साथ है। राजस्थान के आदिवासियों, खासकर दक्षिण राजस्थान के आदिवासियों द्वारा वनस्पतियों से सम्बन्ध का अध्ययन जोशी[1], खण्डेवाल,[2] शर्मा[3] आदि ने विस्तारपूर्वक किया है, लेकिन अभी भी कई तथ्य अछूते या अल्पज्ञात हैं। प्रस्तुत पत्र में ऐसे तथ्यों को ही प्रकट किया गया है तथा 106 उपयोगी पौधों की जानकारी प्रस्तुत की गई है।

प्रयोगात्मक

वर्ष 1986 से 1998 तक दक्षिण राजस्थान के उदयपुर, राजसमंद, चित्तौड़गढ़, डूंगरपुर, बाँसवाड़ा तथा सिरोही जिलों के वनों एवं पर्वतीय क्षेत्रों के भील, भील मीणा, कथोड़ी, डामौर, गरासिया

जैसे आदिवासियों द्वारा वनस्पतियों के प्रयोग करने के तरीकों का अध्ययन किया गया है। आदिवासी बस्तियों में कैम्प करके महत्वपूर्ण जानकारी संग्रह की गई। स्थानीय लोगों, वहाँ तैनात ग्राम स्तर के पुराने कार्यकर्त्ताओं, स्वयंसेवी संस्थाओं, स्थानीय वन अधिकारियों आदि का पूर्ण सहयोग लिया गया। जनजाति अनुसंधान केन्द्र अशोक नगर, उदयपुर की सेवाओं का भी उपयोग किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

आदिवासी अपनी आर्थिक, सांस्कृतिक, धार्मिक तथा सामाजिक जरूरतों हेतु वनस्पतियों से बहुत निकटता से जुडे हुये हैं। कुछ उपयोगों का वर्णन नीचे प्रस्तुत किया गया है :-

1. दातुन

नीम, बबूल, करंज, कम्बोई, खांखरा (पलाश), टीमरू, कंथार की टहनी तथा खजूर की पत्ती का पर्ण अक्ष दातुन की तरह उपयोग लिया जाता है। कंथार दाँतों का पीलापन हटाने हेतु काम में लाई जाती है।

2. खाने हेतु उपयोग (delicacies)

जड़ : सालर व गोदल के नवांकुरों एवं नन्हें पौधों की जड़ों को खाया जाता है।

कंद : मोदी, खड्ला, हरैया (शतावर), सफेद मूलसी। मोदी मकरसंक्रान्ति (14 जनवरी) को विशेष रूप से खायी जाती है। सफेद मूसली क्षेत्र की बहुत महत्वपूर्ण औषधि है जो दैहिक पुष्टि के लिए खाई जाती है।*

फूल : महुआ के फूलों को ताजा व सुखा कर खाया जाता है। सूखे फूलों से देशी शराब भी बनायी जाती है।

कच्चे फल : पलोड़ा बेल।

पके फल : टीमरू, करमदी, बेर, काकौण, धामण, उम्बिया, गौंदा (लिसोड़ा), महुआ (छिलका), गूलर, बड़, पीपल, नीम, खजूर, जामुन, आम, इमली, गेजका, हैल्पी, पलक, लाम्पाण, कम्बोई, चनबोर। बड़, पीपल, गूलर के फलों को स्थानीय भाषा में क्रमशः 'वडला', 'पीपला', व 'उमरा'

---

* मानसून पूर्व की बौछारों के आते ही सफेद मूसली में नई पत्तियाँ व पुष्पक्रम एकसाथ निकल आते हैं। एक प्रयोग के दौरान पाया गया कि 18.6.95 को हल्की बूंदाबांदी झाड़ोल रेन्ज कैम्पस में हुई। इस समय भूमिगत कंदों में कोई फुटान नहीं थी। 20.6.95 व 22.6.95 को प्रातः फिर हल्की बूंदाबांदी हुई। इन दिनों भी सफेद मूसली में फुटान नहीं थी। 26.6.95 को प्रातः पुनः देखने पर पाया कि क्यारियों में 2 से 10 सेमी० तक लम्बे नये प्ररोह पाये गए। इस समय स्टोर में बाहर पड़ी मूसली में भी फुटान हो गया। सफेद मूसली अक्टूबर के आस-पास संग्रहित की जाती है। कथोड़ी यह कार्य विशेष रूप से करते हैं।

कहा जाता है। ये फल भी काफी खाये जाते हैं। पहले अकाल के दिनों में गूलर के फलों का आटा मक्की के आटे में मिलाकर रोटी बनाने के काम आता था। अब गूलर बहुत ही कम रह गया है तथा अब इसका ''अकाल भोजन'' हेतु महत्व भी नहीं रहा। क्षेत्र में खजूरों का भी बहुत महत्व है। गर्मी में संग्रह किए खजूरों के फलों को वर्षा में खाने का रिवाज है।

बीज : सेमल, कडाया। कड़ाया की बीजों को मूंगफली के विकल्प के रूप में खाते हैं।

गिरी : बहेड़ा, घटबोर, हिंगोट, कड़ाया, सेमल, बेर, हवन, आम। आम के बीज गर्म करके खाये जाते हैं।

छाल : अकाल के समय बीजों की आन्तरिक छाल पीस कर आटे में मिला कर खाई जाती है।

3. सब्जी के रूप में उपयोग

कंद : खडूला, गेजवी (मोदी), अलीठी। अलीठी वस्तुतः बुल्विल होते हैं। इन्हें अगली वर्षा तक छाया में संग्रह करते हैं।

जड़ : कमल कचरी यानी कमल की जड़ सब्जी के रूप में खाई जाती है।

नव प्ररोह (भूंगा) : मानसून काल में निकले बांस के नए भूंगों को छोटे-छोटे टुकड़ों में काट कर अचार डाला जाता है।

पुष्प कलियाँ : गोंदी, सहजना (हिंगू), तन्दडा (तण) की कलियां रायता बनाने के काम आती हैं।

फूल : हीतरी (झींझी), कचनार, सेमल, मोरिया पगा, कमदी (करौंदा), आम। सील, गोंदी, सहजना, तण, कचनार, हीतरी की पुष्प कलिकाओं/फुष्पों से रायता बनाते हैं।

फल : कठूमरी (कैंथ), पलोड़ी, बेलपत्र (उबालकर), खेजड़ी, सहजना, आम, करौंदा, आंवला, वनकड़ा, महुआ (फल के छिलके), कीकोडा, करेला, जंगली टिंडा, हीतरी (सूखा फल)। इमली, आम, बांस, करौंदा, आंवला, अचार डालने में काम आते हैं।

पत्ती : गुवार पाठा, सील (ब्रथुआ), पुंवाड़। पुवांड के पत्तों को उबाल कर, फिर निचोड़ कर उनमें मसाला मिला भुजिया बनाते हैं। सील के पत्तों से रायता बनाया जाता है।

गांठ (गोटी) : वनकड़ा की पत्तियों पर स्थित गाँठों से रायता बनाया जाता है।

दाने : मक्का के कच्चे भुट्टों के दाने चाकू से खरौंच पर सब्जी बनाते हैं। चने, तूर, चवला, मूँग आदि के कच्चे बीजों से सब्जी बनाई जाती है।

तेल प्राप्ति हेतु उपयोगी बीज : रतनजोत, करंज, महुआ, सेमल, कटेली, बधनखी एवं माल के बीज वन्य पौधों से संग्रह किये जाते हैं। अम्बाडी, सूरजमुखी, सरसों, रामतिल खेतों में पैदा किये जाते हैं।

4. पत्तल-दौनों हेतु उपयोगी पौधे

खाखरा, बरगद, महुआ, बलिया-बोदल के पत्ते घरेलू रूप से पत्तल-दौना बनाने के काम में लाए जाते हैं। खाखरा की पत्तियों से भोजन रखने के लिए ''टिफिन'' भी बनाए जाते हैं।

5. विवाह सम्बन्धी कार्यों में उपयोगी पौधे

बेलपत्र, आम, बांस, सालर, आकड़ा (फूल), धावडा। धावडा व सालर के चार खम्भे विवाह के मंडप में क्षैतिज दिशा में लगाये जाते हैं। सालर टहनी का माँड़ा गाड़ा जाता है। केला व आम के पत्तों की बन्दनवार लगाई जाती है। वर के घर माँड़ा हेतु सालर की टहनी काटने से पहले वृक्ष की पूजा की जाती है। मांड़े के रूप में रोपित सालर डंडा कुछ दिनों बाद जड़ पकड़ लेता है। इसी से आगे चलकर आँगन में एक सालर वृक्ष बन जाता है। इसे काटना विवाहित पुरुष के शरीर को काटने के तुल्य है।

6. देवताओं को चढ़ाये जाने वाली सामग्री

आंकड़ा, खिरनी, चम्पा, कनेर व गेंदे के फूल तथा बेलपत्र के पत्ते देव पूजन में प्रयुक्त किये जाते हैं। उदयपुर संभाग में खोखरिया की नाल तथा रामा गांव के पास नम नालों में कनेर प्राकृतिक रूप से उगा हुआ मिलता है। बड़ी तालाब, केवड़ा की नाल, भानगढ़, चम्बल नदी के तट आदि स्थानों पर केवड़ा उगा हुआ मिलता है जिसके फूलों को देव पूजन में काम में लाया जाता है। कई जगह कमल के फूलों को भी देव पूजन में काम में लाया जाता है। मगवास गांव के पास ''कमलनाथ मंदिर'' में देवों की पूजा कमल के फूलों से विशेष रूप से की जाती है।

7. झाड़ू हेतु उपयोगी

मूँज, खस-खस जैसी घासों के ''स्केप'' तथा खजूर की पत्ती झाड़ू में बहुत उपयोगी होती है। इस वृक्ष का पुराना पुष्पअक्ष भी झाड़ू बनाने के काम आता है।

8. मृतक के अंतिम संस्कार में उपयोगी अन्न

मक्की, गेहूं, माल, कोदरा, चावल। इनमें माल एवं कोदरा नियमित फसलें नहीं हैं तथा अकाल के समय बोई जाती हैं।

9. मेंहदी के रूप में उपयोगी

टिमडिया (फूल), सागवान (पर्ण-कलिका)।

10. घरेलू उपयोग की लकड़ी

उपचार उपरान्त उपयोगी : बांस, धावड़ा, सालर, गोदल,, सेमल, बहेड़ा, कलम (केमड़ा) करमाला, करंज, काला सिरस एवं खिरनी की लकड़ी उपयोग में लेने से पूर्व 7 दिन पानी में डुबो कर रखते हैं। तदुपरान्त सुखा कर उपयोग किया जाता है। ''पानी उपचार'' से लकड़ी अधिक टिकाऊ हो जाती है।

बिना उपचार उपयोगी : ढाक, सागवान, हल्दू, खैर, बीजा, तिन्सा, बेर, रौंझ, कैगर, बबूल, नीम तथा खजूर की लकड़ी को ''पानी उपचार'' नहीं दिया जाता तथा सीधे ही उपयोग में लाया जाता है। उपर्युक्त में ढाक, खैर तथा कैगर की लकड़ी को कुँओं के अन्दर उपयोग में लाया जाता है क्योंकि पानी में लम्बे समय तक इनकी लकड़ी खराब नहीं होती।

11. देशी शराब बनाने में उपयोगी

जड़ (छाल) : रौंझ

पके फल : बेर, खजूर, उमर (गूलर)

फूल : महुआ

12. देशी शराब बनाने में सहायक सामग्री

छाल : सादड़

फल (छिलका) : संतरा

13. बच्चों के नाक/कान बींधने हेतु उपयोगी काँटे

बेर, बबूल, घटबोर, कांकर, करौंदा, रोंझ, ऐमणा, कैथ, आकोल।

14. विष उत्पादक पौधे

जड़ : पानाहोली (किलकारी)

पत्तियाँ : चित्रावल (*Vogalia indica*)। खेतों में *Plumbego zeylanica* नामक चित्रावल भी मिलती है लेकिन इसे विष हेतु उपयोग नहीं किया जाता।

15. गोंद के लिए उपयोगी पौधे

खाने में उपयोगी : धावड़ा, खैर, अराल, रौंझ, गोदल, बबूल

लोक दवाओं में उपयोगी : आम, ढाक

16. रंग (Dye)

प्रजाति	उपयोगी भाग	रंग	उपयोग
करमेला	छाल	लाल	चमड़ा रँगाई
काला सिरक	छाल	लाल	चमड़ा रँगाई
आंवल छाल	छाल	लाल	चमड़ा रँगाई
तन्दडा (तण)	छाल	लाल	चमड़ा रँगाई
खैर	लकड़ी (तना)	कत्थई	चमड़ा एवं वस्त्र रँगाई
पापड़ी थूर	फल	लाल	वस्त्र रँगाई
टिमडिया	फूल	लाल	मेंहदी के रूप में हाथ रँगने हेतु उपयोगी
ढाक	फूल	केसरिया	वस्त्र रँगने, होली खेलने में उपयोगी

17. पेय रस प्रदान करने वाले पौधे

रस का स्त्रोत	उपयोगी पौधे
तना	खजूर, पानीवेला
पुष्प	महुआ
फल	आम, आंवला

कुछ वर्षों पूर्व राजस्थान में जगह-जगह खजूरों से रस निकाला जाता था। माउन्ट आबू, कूकस बांध, फुलवारी अभयारण्य आदि क्षेत्रों में अध्ययन के दौरान रस निकालने के पुराने निशान खजूरों में पाये गये। वर्तमान में रस निकालने की परिपाटी लगभग समाप्त हो चुकी है।

18. आम के कच्चे फलों को पकाने हेतु उपयोगी पौधे

दंतेरा (*Baliospermum montanum*), ढाक एवं करमेला के पत्तों से कच्चे आम के फलों को 7 दिन तक ऊपर और नीचे ढकने से फल पक जाते हैं व पीला रंग आ जाता है। दंतेरा की जड़ की छाल शराब में डालकर पिलाने से दस्त रोकने के उपाय भी किये जाते हैं।

19. कपड़े धोने में साबुन की तरह उपयोगी

कंदीय मूल : कीकोड़ा

फल : अरीठा

20. जंगलों में ईंधन व घास के भार बांधने हेतु उपयोगी छाल

छीरती, आटेडी, उम्बिया, गोदला, कोदाला, करंज के तने व शाखाओं की खाल तथा बरगद की हवा में लटकी जड़ें रस्सों की तरह उपयोग की जाती हैं।

21. काट कर भविष्य में उपयोग हेतु सुखाई जाने वाली सब्जियाँ

मौसमी सब्जियों को भविष्य में उपयोग करने हेतु छोटे-छोटे टुकड़ों में काट कर सुखा लिया जाता है एवं मिट्टी या धातु के बर्तनों में संग्रह कर लिया जाता है। करेला, भिण्डी, कचरी, ककडी, डांगरा, चवला, टिण्डा के फलों को काट कर सुखा लेते हैं। ढ़ीमडा (चौलाई), चना, बथुआ के पत्तों को सुखाते हैं।

निष्कर्ष

प्रस्तुत प्रपत्र में **106** स्थानीय उपयोगी वनस्पतियों को सूचीबद्ध किया गया है। आदिवासियों की कुशल एवं सहज बुद्धि का आभास इसी से मिल जाता है कि नाना उपयोगों हेतु सर्वोत्तम ढंग से प्रजातियों का चयन किया गया है। चयन इतना सटीक है कि जिस कार्य हेतु जो जाति उपयोग में लाई जा रही है उसका कोई दूसरा विकल्प वहाँ उपलब्ध नहीं है। उपयोग में लाने का यह ज्ञान सैकड़ों सालों के अनुभव के बाद प्रचलन में आया है जिसका संरक्षण जरूरी है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक श्री एच. एम. भाटिया, श्री यू. एम. सहाय, श्री ए. सी. चौबे, श्री ए. एस. चम्पावत, श्री भरत तैमनी, श्री वाई. के. दक, श्री कालूलाल, डॉ. प्रभाकर जोशी, डॉ. सीताराम खण्डेलवाल एवं डॉ. योगेश श्रीवास्तव का आभारी है, जिन्होंने अध्ययन को सफल बनाने में सहयोग किया। डॉ. जोशी ने रामतिल की पहचान में मदद की जिसके लिए उनका आभारी हूँ।

निर्देश

1. जोशी, पी. : एथनोबॉटनी ऑफ द प्रिमिटिव ट्राइब्स इन राजस्थान, प्रिन्टवेल, जयपुर (1995)

2. खण्डेलवाल, एस. आर. पीएच. डी. थीसिस, वनस्पति विज्ञान राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर (1997)

3. शर्मा, एस. के. : लोक प्राणि विज्ञान, हिमांशु पब्लिकेशन्स, दिल्ली, उदयपुर (1998)

परिशिष्ट - 1

प्रस्तुत अध्ययन में वर्णित मुख्य वनस्पतियों के स्थानीय एवं वैज्ञानिक नामों की सूची

स्थानीय नाम	वैज्ञानिक नाम
1. अम्बाड़ी	*Hibiscus cannabinus*
2. अराल	*Acacia pinnata*
3. अरीठा	*Sapindus emarginatus*
4. अलीठी	*Dioscorea bulbosa*
5. आकड़ा	*Calotropis procera*
6. आटेडी	*Helicteres isora*
7. आकोल	*Alangium salvifolium*
8. आम	*Mangifera indica*
9. आंवलछाल	*Cassia auriculata*
10. आंवला	*Emblica officinalis*
11. इमली	*Tamarindus indicus*
12. उम्बिया	*Saccopetalum tomentosum*
13. ऐमणा	*Dichrostachys cinerea*
14. ककड़ी	*Cucumis melo var. utilissimus*
15. कडाया	*Sterculia urens*
16. कचनार	*Bauhinia variegata*
17. कचरी	*Cucumus melo var. agrestis*
18. कटेली	*Argemone mexicana*
19. कठूमरी, कैंथ	*Feronia limonia*
20. कंथार	*Capparis sepiaria*
21. कमबोई	*Kirganelia reticulata*
22. कमल कचरी	*Nelumbo nucifera*
23. कनेर	*Nerium oleander*
24. करमदी, करौंदा	*Carissa carandus*
25. करमाला, करमेला	*Cassia fistula*
26. करंज	*Pongamia pinnata*
27. कलम, केमड़ा	*Mitragyna parviflora*
28. काकौण, कांकर	*Flacourtia indica*
29. काला सिरस	*Albizia lebbeck*
30. कीकोडा	*Momordica dioica*
31. केला	*Musa paradisiaca*
32. कैगर	*Acacia ferruginea*
33. कोदरा	*Paspalum scrobiculatum*
34. कोदाला, मसकरा	*Firmiana colorata*
35. खड़ूला	*Ceropegia bulbosa*
36. खजूर	Phoenix sylvestris
37. खस-खस	*Vetiveria zizanioides*
38. खिरनी	*Wrightia tinctoria*
39. खेजड़ी	*Prosopis cineraria*
40. खैर	*Acacia catechu*
41. गुवारपाठा	*Aloe vera*
42. गूलर, उमर	*Ficus glomerata*
43. गेजका	*Grewia tenax*
44. गेजवी, मोदी	*Pueraria tuberosa*
45. गेंहू	*Triticum aestivum*
46. गैंदा	*Tagetes patula*
47. गोदल	*Lannea coromandelica*
48. गौंदी, लिसोड़ा	*Cordia mixa*
49. घटबोर	*Ziziphus xylopyrus*
50. डांगरा	*Cucumis melo*

स्थानीय नाम	वैज्ञानिक नाम
51. चनबेर	*Ziziphus nummularia*
52. चमेली	*Plumeria acutifolia*
53. चवला	*Vigna unguiculata*
54. चावल	*Oryza sativa*
55. चितावल	*Vogelia indica*
56. चित्रावल	*Plumbago zeylanica*
57. चौलाई, ढीमडा	*Amaranthus spinosus*
58. जामुन	*Sygygium cumini*
59. जंगली टिण्डा, टिण्डा	*Citrullus lanatus var. fistulosus*
60. टिमडिया	*Impatiens balsamina*
61. टीमरू	*Diospyros melanoxylon*
62. तन्दडा, तण, तिन्सा	*Ougeinia oogeinsis*
63. दतेरा	*Baliospermum montanum*
64. धामण	*Grewia tiliifolia*
65. धावड़ा	*Anogeissus latifolia*
66. नीम	*Azadirachta indica*
67. पलक	*Ficus drupacea*
68. पलाश, खांखरा, ढ़ाक, छीला	*Butea monosperma*
69. पलोडाबेल, पलौड़ी	*Wattakaka volubilis*
70. पानीवेला	*Ampelocissus latifolia*
71. पापडीथूर	*Opuntia dellenii*
72. पीपल	*Ficus religiosa*
73. पुंवाड, पंवाड़, पंवाडिया	*Cassia tora*
74. बधनखी	*Martynia annua*
75. बड़, वड़ला, बरगद	*Ficus benghalensis*
76. बबूल	*Acacia nilotica*
77. बलिया बोदल	*Erythrina suberosa*
78. बहेड़ा	*Terminalia bellirica*
79. बांस	*Dendrocalamus strictus*
80. बीजा	*Pterocarpus marsupium*
81. बेलपत्र	*Aegle marmelose*
82. मक्की	*Zea mays*
83. महुआ	*Madhuca indica*
84. माल	*Amaranthus hybridus*
85. माल कांगणी	*Celastrus paniculata*
86. मूँज	*Saccharum bengalense*
87. मोरिया पगा	*Leea edgeworthii*
88. रतनजोत	*Jatropha curcas*
89. रामतिल	*Guizotia abyssinica*
90. रौंझ	*Acacia leucophloea*
91. लाम्पाण	*Bridelia retusa*
92. वनकड़ा	*Garuga pinnata*
93. सफेद मूसली, मूसली	*Chlorophytum tuberosum*
94. सरसों	*Brassica campestris*
95. संहजना	*Moringa oleifera*
96. सादड	*Terminalia tomentosa*
97. सागवान	*Tectona grandis*
98. सालर	*Boswellia serrata*
99. सील, बथूआ	*Chenopodium album*
100. सूरजमुखी, सूरजफूल	*Helianthus annus*
101. सेमल	*Bombex ceiba*
102. संतरा	*Citrus reticulata*
103. हरैया, शतावरी	*Asparagus racemosus*
104. हल्दू	*Adina cardifolia*
105. हवन	*Gmelina arborea*
106. हीतरी, झींझा	*Bauhinia racemosa*

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 44, No. 1, January 2001.

श्यान संपीड्य तरल का अनन्त सरन्ध्र सपाट प्लेट पर मैग्नेटो-हाइड्रोडायनमिक बहाव

आर. एस. एल. श्रीवास्तव
गणित विभाग, गनपत सहाय पी. जी. कालेज, सुलतानपुर (उ. प्र.)

[प्राप्त - अक्टूबर 4, 2000]

सारांश

खरे तथा श्रीवास्तव[1] के परिवर्ती श्यान संपीड्य बहाव जो कि एक सरल सपाट सरन्ध्र दीवालों वाले चैनल से हो रहा था, का अध्ययन समय के साथ बदलते दबाव के लिए किया गया। श्रीवास्तव तथा अन्य[3] ने चुम्बकीय क्षेत्र में उपर्युक्त का अध्ययन किया। प्रस्तुत प्रपत्र में श्यान सम्पीड्य तरल का अनन्त सरन्ध्र सपाट प्लेट पर मैग्नेटो-हाइड्रोडायनमिक बहाव का अध्ययन किया गया है।

Abstract

Magneto-hydrodynamic flow of viscous compressible fluid on an infinite porous flat plate. *By* R. S. L. Srivastava, Department of Mathematics, Ganpat Sahai College, Sultanpur (U.P.).

Khare and Srivastava[1] studied the problem of an unsteady viscous compressible flow through a straight channel with flat porous walls under a time varying pressure. Srivastava et al[3] studied the above problem in the presence of magnetic field. In the present paper solution for magnetohydrodynamic flow of viscous compressible fluid on an infinite porous flat plate has been obtained.

सत्य प्रकाश[5] ने परिवर्ती संपीड्य श्यान बहाव समयानुसार बदलते दाब प्रवणता में दो समान्तर सरन्ध्र दीवारों का अध्ययन किया जिनमें से एक तरल को निकाल रहा था तथा दूसरा सोख रहा था। खरे तथा श्रीवास्तव[1] ने उपर्युक्त समस्या का अध्ययन सम्पीड्य तरल के लिए किया। उन्होंने बाउन्ड्री लेयर सिद्धान्त का प्रयोग सम्पीड्यता के कारण होने वाली कठिनाइयों को सरल करने के लिए किया। श्रीवास्तव तथा अन्य[3] ने अनुप्रस्थ चुम्बकीय क्षेत्र में परिवर्ती श्यान

सम्पीड्य बहाव का अध्ययन सरन्ध्र दीवार वाली सरल प्राणी (Channel) के लिए किया। उन्होंने इसका अध्ययन अचर दाब प्रवणता के लिए किया। प्रस्तुत प्रपत्र में श्यान सम्पीड्य तरल का अनन्त सरन्ध्र सपाट प्लेट पर मैग्नेटो-हाइड्रो डायनमिक बहाव के लिए अध्ययन किया गया है।

समीकरण एवं हल

तब स्वतंत्र धारा पर आधारित रेनाल्डस नम्बर अधिक हो तब श्यान प्रभाव बाउन्ड्री लेयर में सीमित हो जाता है। यहाँ पर प्लेट की लम्बाई में x-अक्ष तथा y-अक्ष प्लेट के नार्मल नहीं है। अल्प विद्युत संवाहकता σ के तरल का बहाव जबकि एक बाहरी चुम्बकीय बल लम्बवत् दिशा में लगा हो, द्विविमीय समीकरण निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है -

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\mu\left[2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]\right\}$$

$$+ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\} - \sigma\frac{B^2}{\rho}v \qquad (1)$$

जहाँ पर u, v वेग के x- तथा y-अक्ष के सापेक्ष घटक हैं। p, t, ρ, μ, σ, तथा B क्रमशः दबाव, समय, घनत्व, श्यानता, विद्युत संवाहकता तथा चुम्बकीय प्रेरण को दर्शाते हैं। तथा सतता समीकरण निम्न हैं

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (2)$$

उपयुक्त प्रतिस्थापन द्वारा तथा छोटी संख्याओं के बड़े घातों को नगण्य मानते हुए समीकरण[1] को अविमितीय रूप में निम्नवत् लिख सकते हैं।

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\ \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\sigma B^2 v}{\sigma} \qquad (3)$$

इसके लिए बाउन्ड्री शर्तें निम्न होंगी—

$$y = 0 \quad u = 0, \quad v = v_s \begin{cases} v_s < 0 & \text{चूषण} \\ u_s > 0 & \text{अन्तःक्षेप} \end{cases} \qquad (4)$$

$$y = \infty \quad u = V(x) \qquad (5)$$

एक समान अनुप्रस्थ चुम्बकीय क्षेत्र में अनन्त सपाट प्लेट के लिए यह मानना उपयुक्त होगा कि भौतिक चर x पर आश्रित नहीं होंगे अतः

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

इसलिए सततता समीकरण निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है -

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{6}$$

समीकरण (6) शर्त $y = 0, v = v_s$ के साथ दर्शाता है कि यह जगह $v = v_s$ है। गति प्रारम्भ होने के अनन्त समय बाद अचर दाब प्रवणता $[= p_o]$ के अधीन बहाव अपरिवर्ती हो जायेगा। अतः समीकरण (3) अपरिवर्ती स्थिति में निम्न प्रकार से लिखा जा सकता हैं—

$$v_s \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} p_o + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma}{\rho} B^2 u \tag{7}$$

उपर्युक्त समीकरण अविमितीय रूप में लिखने के लिए यदि V, L, P U^2 क्रमशः लक्षण, वेग, लक्षण लम्बाई तथा लक्षण दाब हो तो

$$u^* = \frac{u}{u},\ y^* = \frac{y}{L},\ v_s^* = \frac{v_s L}{\nu} \begin{cases} v_s^* < 0 & \text{चूषण} \\ v_s^* > 0 & \text{अन्तःक्षेप} \end{cases} ;\ p^* = \frac{p_o}{P U^2} \tag{8}$$

समीकरण (8) की सहायता से समीकरण (7) निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है—

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} - v_s^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} - R_h^2 u^* = p^* L R_e \tag{9}$$

जहाँ पर $R_h^2 = \sigma L^2 B^2/\mu$, R_h हार्टमान नम्बर है

$R_e = U L/\nu$, R_e रेनाल्ड नम्बर है

तथा उसके लिए बाउन्ड्री शर्तें निम्न होंगी-

$$y^* = 0 \quad u^* = 0,$$
$$y^* = \infty \quad u^* = 1 \tag{10}$$

समीकरण (9) का हल निम्न प्रकार लिखा जा सकता है-

$$u^* = A_1 e \frac{(v_s^* + \sqrt{v_s^2 + 4 R_h^2})}{2} y^* + A_2 e \frac{(v_s^* - \sqrt{v_s^2 + v_s^2 + 4 R_h^2})}{2} y^* - \frac{p_o}{\sigma B^2 U} \quad (11)$$

अब चूँकि v_s^* के धनात्मक, ऋणात्मक तथा शून्य मान के लिए $v_s^* + \sqrt{v_s^* + \nu R_h^2}$ हमेशा धनात्मक या शून्य होगा तथा $v^* = 1$ होगा जब $y^* = \infty$। ऐसी स्थिति में अचर एवं शून्य होना चाहिए। अतः समीकरण **(11)** निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है—

$$u^* = A_2 e \frac{(v_s^* - \sqrt{v_s^2 + \nu R_h^2})}{2} - \frac{p_o}{\sigma B^2 U} \quad (12)$$

शर्त $u^* = 0, y^* = 0$ लेने पर $A_2 = \frac{p_o}{\sigma B^2 U}$,

A_2 का मान समीकरण **(12)** में रखने पर

$$u^* = \frac{p_o}{\sigma B^2 u} \left\{ e \frac{(v_s^* - \sqrt{v_s^{*2} + 4 R_h^2})\, y^*}{2} - 1 \right\} \quad (13)$$

समीकरण (13) से इस निष्कर्ष पर पहुँचा जा सकता है कि अनुप्रस्थ चुम्बकीय क्षेत्र की उपस्थिति में चूषण तथा अन्तःक्षेप प्लेट पर बहाव एक अनन्त स्पर्शीय वेग प्रोफाइल को प्रदर्शित करता है। अनुप्रस्थ चुम्बकीय क्षेत्र की अनुपस्थिति में अनन्त स्पर्शीय वेग प्रोफाइल केवल चूषण प्लेट के लिए होगा।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक प्रो० हरिश्चन्द्र खरे के प्रति धन्यवाद ज्ञापित करता है जिन्होंने शोधपत्र तैयार करने के लिए प्रेरित किया।

निर्देश

1. खरे, एच. सी. तथा श्रीवास्तव, आर. एस. एल., : अक्टा फिजिका पोलोनिका, 1971, 40अ, 131.
2. रोजनहेड, एल. : Laminar Boundary Layers, आक्सफोर्ड, 1963.
3. श्रीवास्तव, आर. एस. एल. तथा अन्य : इल न्यूवो सिमेन्टो, 1974, 22 वी, एन-1, II लुगलियो,
4. इसकिनाजी, एस. : Vecor Mechanic of Fluids and Magneto fluid, न्यूयार्क, 1967.
5. सत्य प्रकाश, : प्रोसीडिंग्स नेशनल इन्स्टी. साइंसेज इण्डिया 1960, **35**, 123.

लेखकों से निवेदन

- विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हैं और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका को होना चाहिये।
- लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।
- अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये पाँच रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।
- लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे K_4FeCN_6 अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।
- ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।
- प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिए । अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सके।
- प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।
- लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायेंगे। पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume)और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से

  फॉवेल, आर० आर० तथा म्युलर, जे०, जाइट फिजिक० केमि०, 1928, 150, 80
- प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) एक सौ रुपये मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।
- लेख ''सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2''इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबन्ध सम्पादक

मूल्य
वार्षिक मूल्य : 100 रु० या 20 पौंड या 50 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 25 रु० या 6 पौंड या 10 डालर

Rates
Annual Rs. 100 or £ 20 or $ 50
Per Vol. Rs. 25 or 6 £ or $ 10

प्रकाशक :

विज्ञान परिषद् प्रयाग
महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2

Vijnana Parishad Prayag
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad-2 (India)

मुद्रक : कम्प्यूटर कम्पोजर्स
7 बेली एवेन्यू, इलाहाबाद
फोन : 640854, 640405

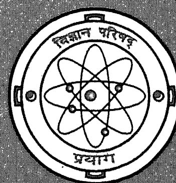
ISSN : 0505-5806

Vol. 44 April 2001 No. 2

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

The Research Journal of the Hindi Science Academy

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika



विज्ञान परिषद् प्रयाग

महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-211002

कौंसिल ऑफ साइंस एण्ड टेक्नालॉजी, उत्तर प्रदेश तथा कौंसिल ऑफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च, नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित

विषय-सूची

Vol. 44 April 2001 No.4

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 44, No. 2, April 2001.

टेंगरा मछली [*ऐरिक्थिस सिंघाला* (साइक)] उत्पादन की संभावनाएँ

रवीन्द्र नाथ सेठ

केन्द्रीय अंतःथलीय प्रग्रहण मात्स्यकी अनुसंधान संस्थान,
24 पन्ना लाल मार्ग, इलाहाबाद-21102

तथा

प्रदीप कटिहा

केन्द्रीय अंतःथलीय प्रग्रहण मात्स्यकी अनुसंधान संस्थान, बैरकपुर (पश्चिम बंगाल)

[प्राप्त — फरवरी 12, 2001]

सारांश

जहाँ कैट फिश मछली के पालन संसार के अनेक देशों में एक औद्योगिकी के रूप में स्थापित हुआ, वहीं हमारे देश में मछली पालन में इसके महत्त्व को देर से समझा गया, यद्यपि हमारे देश में इनकी कई प्रजातियाँ पालने हेतु उपलब्ध हैं। इसी समूह की टेंगरा जति की मछली (ऐरिक्थिस सिंघाला साइक) अपने स्वाद, महक, मांस की गुणवत्ता के लिये उत्तर भारत के अनेक प्रदेशों में खाने के लिये विशेष रूप से उपयोग में लायी जाती है।

केन्द्रीय अन्तःथलीय प्रग्रहण मात्स्यकी अनुसंधान संस्थान के शोध प्रयासों के फलस्वरूप पहली बार टेंगरा मछली के बीज उत्पादन एवं तालाबीय परिस्थिति में पालने की तकनीक विकसित करने में अभूतपूर्व सफलता मिली है। गंगा नदी से इनके नवजात बच्चों को इनके प्राकृतिक आवास यानी ''घोसलों'' से निकाल कर इनकी अंगुलिकाओं का उत्पादन कर तालाबीय परिस्थिति में पाल कर इनका सफल प्रजनन भी करवाया गया। यह शोधपत्र इन प्रयोगात्मक प्रयासों के परिणाम की विवेचनास्वरूप प्रस्तुत किया गया है।

Abstract

Culture prospects of *Aorichthys Seenghala* (Sykes). *By* Ravindra Nath Seth, Division of Riverine Fisheries, Central Inland Capture Fisheries Research Institute, Allahabad, and P. K. Katiha, Central Inland Capture Fisheries Research Institute, Barrackpore (W.B.)

Culture of catfishes or siluroids has already been established as a flourishing enterprise in many countries of the world viz. U.S.A., Thailand and Combodia etc. In India the importance of catfish as a second line of fish production has been realized late although our natural inland waters harbour many large sized catfishes suitable for culture. Among them *Aorichthys seenghala* (sykes) is of prime importance due to high consumer's preference in north and north western states of our country. Experiments conducted at Central Inland Capture Fisheries Research Institute led to the development of a suitable technique for culture of seenghala in confined water for the first time. The youngones of seenghala collected from their natural abode 'Nest' were reared till fingerling size, later these were stocked in a pond where after successful culture of two years, these were bred in pond conditions. The present paper reports the result of experiment conducted towards evolving a suitable method for culture of the fish.

विविध संस्कृति के अनुरूप भारतीय प्रदेशों में भिन्न-भिन्न प्रकार की मछलियाँ खाने के लिये पसन्द की जाती हैं। उत्तर भारत के अधिकतर प्रदेश, जिनमें पंजाब, हरियाणा, हिमाचल प्रदेश, दिल्ली एवं उत्तर प्रदेश प्रमुख हैं, बड़ी कैट फिश (एक काँटे की मछली जिसमें शल्क नहीं होता) समूह की मछलियाँ खाने के लिये विशेष रूप से उपयोग में लाई जाती हैं। इसी समूह की टेंगरा जाति की मछली *ऐरिक्थिस सिंघाला* (साइक) प्रमुख रूप से अपने स्वाद, महक व मांस की गुणवत्ता के लिये सर्वाधिक पसन्द की जाती है। यह गंगा नदी की एक प्रमुख मछली है। एक ओर जहाँ अन्य देशों जैसे अमेरिका, थाइलैन्ड, कम्बोडिया, मलेशिया इत्यादि में कैट फिश पालन एक औद्योगिकी के रूप में स्थापित हुआ, वहीं हमारे देश में इन मछलियों की बीज उत्पादन तकनीक विकसित न होने के कारण इनका तालाबीय परिस्थिति में पालन सम्भव न हो सका।[1, 2]

नदीय परिस्थिति में इनकी संख्या में लगातार गिरावट वैज्ञानिक चिन्तन का विषय बन चुका है। मत्स्य वैज्ञानिकों[3, 4] का मत है कि वर्तमान परिस्थिति में कैट फिश मछली पालन एवं इनके बीज उत्पादन की विधियों को विकसित करना अत्यन्त आवश्यक है।

गंगा नदी में टेंगरा का प्रजनन काल मार्च से जून तक होता है[5, 6]। नवजात बच्चे नर टेंगरों की देख-रेख में नदी के तल में बने प्याली के आकार के घोंसलों में रहते हैं तथा टेंगरा के शरीर से स्रवित द्रव्य को चाट कर 25 से 45 दिनों में इतने बड़े हो जाते हैं कि स्वतंत्र जीवन बिता सकें[7]। अतएव नवजात बच्चों को इनके प्राकृतिक घरों-घोसलों-से निकाल कर, कृत्रिम भोजन पर पालकर इसके बीज उत्पादन की समस्या का निदान सरल रूप से किया जा सकता है। इस विचार को ध्यान में रखकर वर्तमान शोधपत्र टेंगरों के नवजात शिशु को नदियों से इकट्ठा करना, एवं इनको कृत्रिम भोजन पर बड़ा कर तालाबों, पिंजड़ों में संचय कर इसके उत्पादन की संभावनाओं पर प्रकाश डालने हेतु प्रस्तुत किया गया है।

प्रयोगात्मक

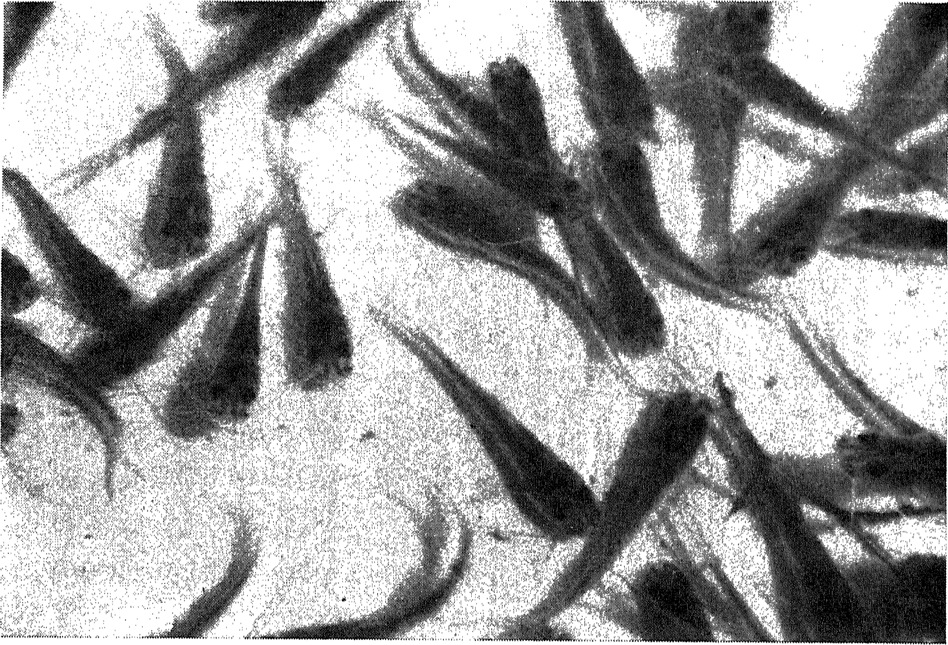
ऐरिक्थिस सिंघाला (साइक) यानी के प्रजनन काल (मार्च से जून) के दौरान बिक्री हेतु मछली बाजार में लाई गई टेंगरा मछली की जाँच इसके शरीर से स्त्रवित गाढ़े पीले रंग के चिपचिपे द्रव्य हेतु की गयी। नदियों में ऐसी टेंगरों का शिकार कर के लाने वाले मछुआरों से नदी में शिकार के स्थान का विवरण लेकर उस स्थान का गहन सर्वेक्षण टेंगरा के घोसलों को ढूँढ़ने के लिये किया गया। टेंगरा अपना घोसला नदी के तल पर बनाती है जो कि पानी की सतह से दिखाई नहीं देता, अतएव तीन चार मछुवारों के साथ नदी में कमर तक पानी में टहल टहल कर प्याली के आकार के गड्ढों का पता लगाया गया। यदि ऐसे गड्ढ़ों में टेंगरा के नवजात बच्चों के पैर में लगने या चाटने की अनुभूति हुई तो इन गड्ढ़ों को साफ कोमल कपड़े की सहायता से टेंगरों के नवजात बच्चों की उपस्थिति जानने के लिये काँछा गया।

इलाहाबाद के आस पास गंगा नदी के 45 किलोमीटर क्षेत्र (मेंहदौरी घाट से सिरसा घाट) एवं यमुना नदी के छः किलोमीटर क्षेत्र (मड्डुका घाट से अरैल) का सर्वेक्षण मार्च माह से जून 1996 तक किया गया।

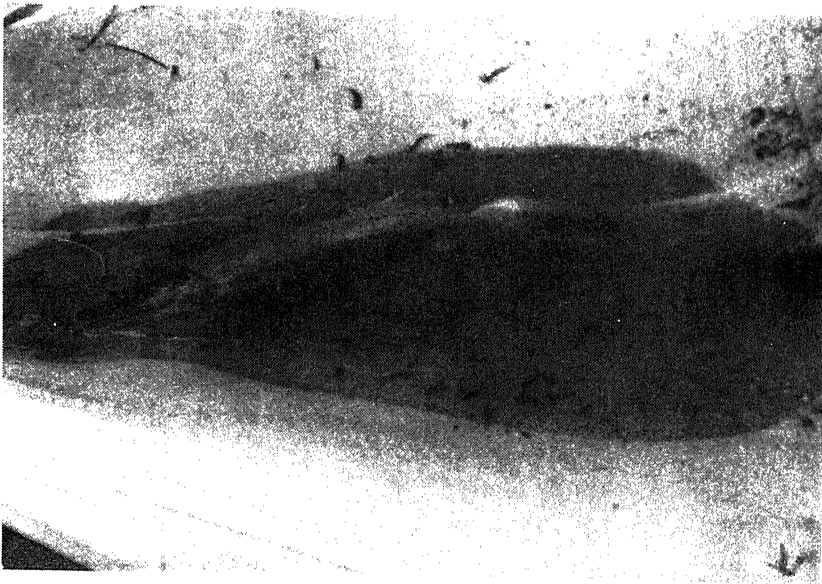
नवजात बच्चों को नदी में कुछ देर तक हापा में रखने के पश्चात् खुले बर्तनों या आक्सीजन पैकिंग में प्रयोग स्थल तक लाया गया। लगभग एक दिन भूखा रखने के बाद इन नवजात बच्चों को गंगा नदी में तैरते पिंजड़ों (1×1×1 मीटर) एवं प्रयोगशाला में प्लास्टिक पूल में उबली छोटी मछली मुख्यतः **गैडुसिया चपरा, सेंटीपिन्ना फासा, ऐस्पिडियोपाइरिया मोरार** इत्यादि के पूरक आहार पर पाला गया। सारणी 2 में नवजात बच्चों को पिंजड़ों में पालने की प्रक्रिया से प्राप्त परिणामों को दर्शाया गया है।

तालाबीय परिस्थिति में टेंगरा को पालने की सम्भावनाओं का अध्ययन करने के लिये इलाहाबाद नगर के पास एक छोटे तालाब (0.05 हेक्टेयर) में गंगा एवं यमुना नदी से इकट्ठा किये गये टेंगरा के नवजात शिशु (औसतन लम्बाई 22 मि.मी.) दस हजार प्रति हेक्टेयर की दर से 5 से 6 घंटे तक तालाब की परिस्थिति में अभ्यस्त करने के पश्चात् तालाब में छोड़ा गया। टेंगरा अंगुलिकाओं के संचय से सफलतापूर्वक खोजे गये, जिनसे 7610 टैंगरा के नवजात बच्चों को इकट्ठा किया गया। प्रायः यह पाया गया कि एक घोसले से मिले बच्चों की लम्बाई एक सी थी। प्रति घोसले बच्चों की संख्यां व उनकी लम्बाई में भी एक सीधा सम्बन्ध होता है। बच्चे जब 40 मि.मी. तक बढ़ जाते हैं तो वे घोसला छोड़कर स्वतंत्र जीवन बिताने हेतु नदी में मिल जाते हैं। यह समय नदी में लगभग बाढ़ आने का होता है।

टेंगरा के घोसलों को खोजते समय सामान्यतः यह पाया गया है कि टेंगरा अपने घोसले छिछले पानी में, जहाँ बहाव का वेग कम हो तथा नदी का भाग मुख्य नदी से अवश्य मिला हो, बनाती है। सिंह तथा अन्य[8] ने टेंगरा मछली के बच्चों को नदी से निकालने हेतु अध्ययन किया था पर अभाग्यवश इसका सम्पूर्ण विवरण प्रकाशित न हो सका। सर्वप्रथम सहगल तथा मोतवानी[5]



चित्र 1 : ऐरोस्थिक सिंघाला के नवजात शिशु।



चित्र 2 : नर ऐरोस्थिक सिंघाला अपने नवजात शिशुओं के साथ।

ने यमुना नदी से इनके अंडों को इकट्ठा कर प्रयोगशाला में इनके विभिन्न विकास चरणों का अध्ययन किया। वर्तमान में सेठ तथा कटिहा[11] ने बड़े पैमाने पर इन बच्चों को नदियों से इकट्ठा करने की तकनीक पर शोधपत्र प्रस्तुत किया है।

टेंगरा के नवजात बच्चे नर टेंगरा से स्रावित गाढ़े पीले रंग के चिपचिपे द्रव्य को चाट-चाट कर बढ़ते हैं।[9, 10, 11] इनको कृत्रिम भोजन पर जिन्दा रख पाना एक कठिन समस्या समझा जाता रहा है। सर्वप्रथम सिंह तथा अन्य[8] ने इनको कृत्रिम भोजन पर जिन्दा रखने में सफलता प्राप्त की। वर्तमान अध्ययन के अनुसार इनको पिंजड़ों में रखकर 45 से 50 दिन में अंगुलिकाओं का पैदा करना संभव किया गया (सारणी 1)। ऐसी ही सफलता प्रयोगशाला के प्रयोगों में भी मिली। इन अध्ययनों से यह सुनिश्चित हो ज़ाता है कि घोसलों से बच्चों को निकाल कर इनके बीज की समस्या का निदान हो सकता है।

सारणी 1

पिंजड़ों में अंगुलिकाओं का उत्पादन

पिंजड़ों की संख्या	नवजात बच्चों की संचय संख्या	नवजात बच्चों की शुरुआती लम्बाई (मि. मी.)	पाले जाने वाले दिनों की संख्या	अंगुलिकाओं की लम्बाई (मि.मी.)
1	500	25-28	40	75.4
2	1000	16-21	40	73.5
3	1500	19-21	40	68.6
4	2000	14-18	50	76.8

पूर्व तालाब में नदी से निकाली गई छोटी मछलियों जैसे **पुनटियस, मोरार, चपरा, नामा, रांगा** इत्यादि इस आशय से डाल दी गयी थीं कि ये मछलियाँ तालाब में प्रजनन करके बढ़ते टेंगरा के भोजन का कार्य करेंगी। तालाब में प्रयोगकाल के दौरान पूरक आहार नहीं दिया गया। समय समय पर ट्यूबवेल से पानी प्राप्त करके तालाब में पानी की कमी को पूरा किया जाता रहा। प्रयोगकाल की अवधि में प्रति माह नियमित रूप से जाँच एवं बढ़ते हुये टेंगरा की लम्बाई व भार का अवलोकन भी किया गया।

टेंगरा के प्रजनन काल में पानी की सतह को स्थिर रखकर तथा तालाब में जाने की पाबन्दी लगाकर तालाबीय परिस्थिति में टेंगरा का सफल प्रजनन करवाया गया।

परिणाम तथा विवेचना

सर्वेक्षण करने पर प्राप्त टेंगरों के घोसलों एवं इनमें से प्राप्त बच्चों का विवरण सारणी 2 में दर्शाया गया है। इसका अवलोकन करने से ज्ञात होता है कि गंगा क्षेत्र में 6 दिन के सर्वेक्षण से

कुल 15 टेंगरों के घोसले मिलें जिनमें से 33,710 टेंगरा के बच्चे मिले जिनकी लम्बाई 1 मि.मी. से 33 मि.मी. तक थी। सबसे ज्यादा घोसले अप्रैल माह में मिले। चार दिन के यमुना नदी के सर्वेक्षण में 4 घोसले मिले।

सारणी 2

सर्वेक्षण से प्राप्त टेंगरा के घोसले एवं नवजात बच्चे

नदी	मास	सर्वेक्षण दिन (संख्या)	घोसलों की संख्या	नवजात बच्चों की संख्या	नवजात बच्चों की लम्बाई (मि.मी.)
गंगा	मार्च	1	5	14,360	14 से 21
	अप्रैल	2	6	12,200	11 से 19
	मई	2	2	6,000	21 से 30
	जून	1	2	1,150	30 से 33
	कुल	*6*	*15*	*33,710*	
यमुना	मार्च	1	1	2,560	19 ± 1
	अप्रैल	1	1	3,300	17 ± 1
	मई	1	1	650	24 ± 1
	जून	1	1	1,100	19 ± 1
	कुल	*4*	*4*	*7,610*	

टेंगरा को तालाब में पाले जाने के प्रयास में अभूतपूर्व सफलता पहली बार तब मिली, जब लगभग 75 मि.मी. की अंगुलिकायें (2.5 ग्राम) नौ माह में बढ़कर औसतन 355 मि. मी. (औसतन 350 ग्राम) की हो गई। इनको लगभग 21 माह तक पालने पर ये 518 मि. मी. (औसतन 717 ग्राम) की पाई गईं। इस दौरान इनकी संचय की हुई संख्या में कोई विशेष क्षति नहीं हुई। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि टेंगरा तालाबीय परिस्थिति में भली-भाँति पाली जा सकती है।

एक वर्ष 10 माह के अन्तराल पर तालाब में टेंगरा को पहली बार प्रजनन के लिये तैयार देख तालाब को किसी भी बाहरी हस्तक्षेप से अवरोधित कर दिया गया। चूँकि नदीय परिस्थिति में इनके घोसले बनाने की प्रक्रिया का गहन अध्ययन हो चुका था, ऐसी विशेष व्यवस्था तालाब में करने के पश्चात् प्रजनन माह में टेंगरा ने अपने घोसले तालाब की तली पर बनाने शुरू कर दिये। पहला घोसला मार्च माह में लगभग 90 से. मी. गहराई में मिला, तत्पश्चात् अप्रैल माह में 23 घोसले तालाब में देखे गये जिनमें टेंगरा के नवजात बच्चे थे।

यह नया प्रयास सम्भवतः मत्स्य पालन के क्षेत्र में मत्स्य व्यवसाय से जुड़े लोगों के लिए अत्यधिक उपयोगी सिद्ध होगा। चूँकि मार्च से जून तक का समय मछली व्यवसाय (पालन) से जुड़े एवं कृषि कार्य के लिए कम व्यस्तता वाला होता है अतः इस समय का उपयोग कर टेंगरा के बच्चों को घोसलों से निकाल कर, जिनकी संख्या प्रति घोसला 6000 या अधिक होती है, दस से पन्द्रह दिन तक पालकर इनकी अंगुलिकाओं का उत्पादन किया जा सकता है। उपर्युक्त तथ्यों के अनुसार तालाबों में लगभग दो साल तक पालने पर यह औसतन 518 मि. मी. लम्बी एवं 717 ग्राम वजन की हो जाती है और स्वतः प्रजनन करती है। इनको तथा इनके बच्चों को बेचकर अच्छी आमदनी की जा सकती है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

डॉ० मणिरंजन सिन्हा, निदेशक, केन्द्रीय अन्तःस्थलीय प्रग्रहण मात्स्यकी अनुसंधान संस्थान, बैरकपुर द्वारा सुझाव एवं सम्पादन में प्राप्त सहायता के प्रति लेखकद्वय सहृदय आभार व्यक्त करते हैं।

निर्देश

1. सिंह, एस० पी०, मल्होत्रा, जे० सी०, सेठ, आर० एन०, श्रीवास्तव, के० पी० तथा चन्द्रा, के० : ऐक्वाकल्चर, 1982, 26, 161-166
2. ठाकुर, एन० के० : जर्न० फिशरीज, इनलैंड सोसा० आफ इन्डिया, 1991, 23(2), 80-90
3. गुप्ता, आर० के० तथा त्यागी, आर० के० : जर्न० फिशरीज इनलैंड सोसा० आफ इन्डिया, 1992 24 (2), 20-27
4. सेठ आर० एन० तथा प्रदीप कटिहा : नेशनल सिम्पोजियम आन सस्टेनेबेल डेवेलपमेन्ट आफ फिशरीज टूवर्ड्स 2020 ए० डी० : अपारचुनिटीज एण्ड चेलेंजेस, स्कूल आफ इन्डस्ट्रियल फिशरीज, कोचीन, यूनिवर्सिटी आफ साइंस एण्ड टेक्नालॉजी कोचीन, इन्डिया पृष्ठ 77
5. सहगल, बी० एन० तथा मोतवानी, एम० पी० : इन्डियन जनरल आफ फिशरीज, 1961, 8(1), 60-74
6. सत्यनेशन, ए० जी० : नेशनल इन्स्टीच्यूट साइंस इन्डिया, 1962, 28(2), 497-507
7. सेठ, आर०एन० : डी० फिल थीसिस, डिपार्टमेन्ट आफ जूलोजी, यूनिवर्सिटी आफ इलाहाबाद (1977)
8. सिंह, एस० पी०, सेठ, आर० एन०, मल्होत्रा, जे० सी० तथा जैन, एम० के० : सिम्पोजियम आन इनलैण्ड एक्वाकल्चर सेन्ट्रल इनलैण्ड कैप्चर फिशरीज रिसर्च इन्स्टीच्यूट, बैरकपुर ऐबस्ट्रेक्ट नं० 139, 1979
9. राज, बी० एस० : ऐबस्ट्रेक्ट, 27वाँ इन्डियन साइंस कांग्रेस कलकत्ता, 1940
10. राज, बी० एस० : दि एक्स्ट्राआरडिनेरी ब्रीडिंग आफ ए कैटफिस मिस्टस : प्रोसी० नेशनल इन्स्टीच्यूट साइंस, इन्डिया बी 1962, 28, 193-204
11. सेठ, आर० एन० तथा प्रदीप कटिहाः (प्रकाशनाधीन)

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 44, No. 2, April 2001.

अनुनादी तापनाभिकीय अभिक्रिया तथा फाक्स का H-फलन

अशोक कुमार रोंघे
गणित विभाग, एस. एस. एल. जैन एच. एस. विद्यालय, विदिशा (म. प्र.)
तथा
रवि जैन
सम्प्रयुक्त भौतिकी विभाग, सम्राट अशोक टेक्नालाजिकल इंस्टीट्यूट, विदिशा (म. प्र.)

[प्राप्त – जुलाई 5, 1996]

सारांश

अनुनादी तथा गैर अनुनादी तापनिभिकीय अभिक्रिया दरों के मूलभूत भौतिक सिद्धान्तों का सम्प्रयोग नाभिकीय गणितीय ताराभौतिकी हेतु उनके मानक निरूपणों के लिए किया जाता है। अनुनादी अभिक्रिया दर के लिए संवृत रूप निरूपणों को फाक्स के H-फलनों के रूप में व्युत्पन्न किया गया है।

Abstract

The resonant thermonuclear reaction rate and Fox's H-function. *By* Ashok Kumar Ronghe, Department of Mathematics, S. S. L. Jain H. S., Vidisha (M.P.) and Ravi Jain, Department of Applied Physics, Samrat Ashok Technological Institute, Vidisha (M.P.).

Basic physical principles for the resonant and nonresonant thermonuclear reaction rates are applied to find their standard respresentations for nuclear mathematical astrophysics. Closed-form respresentations for the resonant reaction rate are derived in terms of Fox's H-function.

1. प्रस्तावना

सम्प्रति ऐसा विश्वास है कि नाभिकीय अभिक्रियाएँ ब्रह्माण्ड के रासायनिक विकास के समस्त पक्षों को नियन्त्रित करती हैं। ब्रह्माण्डीय तथा तारकीय नाभिक-विश्लेषण में नाभिकीय अभिक्रियाओं

के गहन ज्ञान को नाभिकीय अभिक्रिया गतिकी के पुष्ट सिद्धान्त पर आधारित होना चाहिए[3, 5]। नाभिकीय अभिक्रियाओं की दर को क्वांटम यान्त्रिकीय मात्रा के रूप में व्यक्त किया जाता है जो अभिक्रिया अनुप्रस्थकाट कहलाती है। न्यूट्रानों, प्रोटानों, एल्फाकणों या भारी परमाणुक नाभिकों वाली अभिक्रिया का वर्णन करते समय लक्ष्य नाभिकों के प्रभावी अनुप्रस्थ काट को समाविष्ट करना सुविधाजनक होता है जो यह सूचित करता है कि आपतित प्रकाश पुंज का कौन सा क्षेत्रफल प्रभावित हो रहा है। यदि अभिक्रिया करने वाले कणों का सापेक्ष वेग v हो, नाभिकीय अनुप्रस्थ काट σ हो तथा आपतित एवं लक्ष्य कणों के संख्या घनत्व n_m $(m = i, j, k, 1)$, हों तो दो कण की अभिक्रियाओं की संख्या $(i + j \rightarrow k + l)$, इकाई आयतन तथा इकाई समय में

$$R_{ij} = n_i n_j \sigma v \quad (1)$$

होगी। किन्तु ब्रह्माण्डीय तथा तारकीय नाभिक संश्लेषण में अनुभव की जाने वाली भौतिक दशाओं के अन्तर्गत आपतित तथा लक्ष्य कणों में कोई भेद नहीं होता। साथ ही, अभिक्रिया करने वाले कणों के समस्त सापेक्ष वेग एक से नहीं होते और नाभिकीय अनुप्रस्थ काट सापेक्ष वेगों पर प्रबलतः निर्भर करता है। इस तरह दो कणों की अभिक्रियाओं की संख्या को सूत्र (1) का कणों के सापेक्ष वेग के समस्त मानों के लिए समाकलन करके सार्वीकृत करना होता है। यदि क्वांटम यान्त्रिकीय प्रभावों के कारण होने वाले संशोधन उपेक्षणीय हों तो एक सापेक्ष वेग के मैक्सवेल-बोल्ट्जमान वितरण की कल्पना इस प्रकार कर सकते हैं–

$$d v \, f(v) = \left(\frac{\mu}{2 \pi K T} \right)^{3/2} \exp. \left\{ - \frac{\mu v^2}{2 K T} \right\} 4 \pi v^2 \, d v \quad (2)$$

जहाँ $\mu = (m_i m_j) / (m_i + m_j)$, विचाराधीन दो कणों की अवह्रासित संहति को बताता है, T ताप है तथा K बोल्ट्ज़मान अचर है।

मैक्सवेल-बोल्ट्ज़मान वितरण का यह भी अर्थ है कि नाभिकीय अभिक्रिया उष्मागतिकीय साम्यावस्था की भौतिक दशाओं के अन्तर्गत अग्रसर होती है।[6] उष्मागतिकीय साम्यावस्था में तन्त्र को समस्त भौतिक गुणधर्मों को उसके घनत्व, ताप तथा रासायनिक संघटन के रूप में परिगणित किया जा सकता है।

सापेक्ष गतिज ऊर्जा $E = \mu v^2/2$ के रूप में (1) तथा (2) से हम

$$r_{ij} = n_i \, n_j \, \langle \sigma v \rangle \quad (3)$$

प्राप्त करते हैं जहाँ -

$$< \sigma v > = \left(\frac{8}{\pi \mu} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{K T} \right)^{3/2} \int_o^{\infty} d E \, \sigma (E) \, E. \, \mathrm{Exp} < -E/KT > \quad (4)$$

प्रति इकाई समय संभाव्यता है जब इकाई आयतन में बँधे दो कण एक दूसरे से अभिक्रिया करेंगे[6]।

इधर के वर्षों में तापनाभिकीय अभिक्रिया दर r_{ij} के लिए गणितीय विधियों के विकास में काफी रुचि दिखाई गई है जो अनुप्रस्थ काट $\sigma (E)$ की विशिष्ट विश्लेषिक संरचना पर निर्भर है।[2,-7] हौबोल्ड तथा जान ने[7] नाभिकीय अभिक्रिया दरों के संवृत रूप निरूपणों पर हुए प्रारम्भिक कार्य की समीक्षा की है।

हमने अनुभाग II में हाल ही में अपने द्वारा प्राप्त गैर अनुनादी तापनाभिकीय अभिक्रिया दर के संवृत रूप निरूपण के परिणामों का संक्षिप्तीकरण किया है।[6] अनुभाग III में नाभिकीय अनुप्रस्थ काट $\sigma (E)$ का विशेष उल्लेख हुआ है। अनुभाग IV में निष्कर्ष दिए गए हैं।

II. गैर अनुनादी तापनाभिकीय अभिक्रिया दर के लिए विश्लेषिक परिणाम

इसके अन्तर्गत हम (4) में मात्रा $<\sigma v>$ को निम्न-ऊर्जा नाभिकीय अभिक्रिया, जो किसी अनुनाद से बहुत दूर है और जिसकी विवेचना फ्रैंक-कामेनेकिज[4] तथा क्लेटन[3] ने प्रोटान, एल्फा कणों, या भारी नाभिकों जैसे आवेशित कणों द्वारा अभिक्रियाओं के लिए मानक दशा के रूप में किया है। (4) में अनुप्रस्थ काट $\sigma (E)$ में होने वाले तीव्र विचरण को कूलॉम अवरोध में से होकर प्रेषण को नियन्त्रित करने वाले गैमो भेदन गुणांक के विचरणशील पद को बहिष्कृत करके विचार किया गया है।

$$(E) = [S(E)/E] \exp [-2\pi\eta(E)] \tag{5}$$

$$\eta(E) = (\mu/2)^{1/2} [Z_i Z_j e^2/(h E^{1/2})] \tag{6}$$

जहाँ

Z_i तथा Z_j परस्पर अभिक्रया करने वाले नाभिकों की आवेश संख्याएँ हैं,

h क्रिया का प्लांक क्वांटम है तथा

e वैद्युत आवेश का क्वांटम है।

$\sigma(E)$ की सापेक्ष गतिज ऊर्जा E के उत्क्रम के प्रति आश्रिता दो कणों के बीच क्वांटम-यान्त्रिक अन्योन्य क्रिया में लौट जाती है जो सदैव ज्यामितीय गुण्क $\pi\lambda^2 \propto E^{-1}$ के समानुपाती होती है जहाँ λ द ब्रोगली तरंगदैर्ध्य है। समीकरण (5) अनुप्रस्थ काट गुणक $S(E)$ को परिभाषित करता है और नाभिकीय अभिक्रिया की घटना के लिए सम्भाव्यता के नैजतः नाभिकीय अंशों का प्रतिनिधित्व करता है। अनुप्रस्थ काट गुणक $S(E)$ प्रायः स्थिर होता है या सीमित ऊर्जा परास में धीरे-धीरे बदलता है। इसे घात श्रेणी प्रसार के पदों में व्यक्त किया जा सकता है।[1, 3, 5, 7]

$$S(E) = S(O) + \frac{d\,S(O)}{(d\,E)} + \frac{1}{2}\,\frac{d\,S(O)}{(d\,E)^2} \cdot E^2 \tag{7}$$

यदि हम (5)–(7) सम्बन्धों का उपयोग करें तो हम (4) को $Y = E/KT$ प्रतिस्थापन करके निम्नवत् लिख सकते हैं—

$$<\sigma v> = \left(\frac{8}{\pi\mu}\right)^{1/2} \sum_{\nu=0}^{z} \frac{1}{(K\,T)^{-\nu+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{S^{(\nu)}(o)}{\nu\,!} \times \int_0^\infty e^{-y}\, y^{\nu}\, e^{-z/y^{1/2}} \cdot dy \tag{8}$$

जहाँ

$$Z = 2\pi\,(\mu/2\,K\,T)^{1/2}\, Z_i\, Z_j\, e^2/h) \tag{9}$$

समीकरण (8) मूलभूत प्राचलीकृत निरूपण है गैर अनुनादी तापनाभिकीय अभिक्रिया संभाव्यता प्रति इकाई समय में जिसमें इकाई आयतन में बद्ध दो आवेशित कण एक दूसरे से अभिक्रिया करेंगे।

(8) में प्राचल आश्रित समाकल के संवृत रूप निरूपण

$$N_{i\,\nu}(z) = \int_0^\infty e^{-y} \cdot y^{\nu} \cdot e^{-z/y^{1/2}} \cdot dy \tag{10}$$

को सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलनों के समाकल सिद्धान्त द्वारा प्राप्त किया जा सकता है जैसा कि मथाई तथा सक्सेना ने[8] विवेचना की है। हम अपने अन्तिम परिणाम को लिख रहे हैं-

$$N_{i\,\nu}(Z) = H_{2\,\cdot\,2}^{2\,\cdot\,0}\left[Z \Big|\begin{matrix} ((a_j,\ \alpha_j))_{1,p} \\ (0,\ 1)\,(1+\nu\ :\ 1/2),\ ((b_j,\ B_j))_{1,q} \end{matrix}\right] \tag{11}$$

जहाँ z की परिभाषा (9) में दी है।

$$H_{p,q}^{m,n}\left(z \,\Big|\, \begin{matrix} 1\,p \\ b\,q \end{matrix}\right)$$

सूचित करता है फाक्स के H-फलन को[9] परिणाम (11) से बहकाल[1] तथा क्रिचफील्ड[2] के शोधपत्रों में निहित समाकल (8) के सन्निकटित निरूपणों का सार्वीकरण करता है जैसा कि हौबोल्ड तथा जान[7] ने विस्तार से विवेचना की है।

III. अनुनादी तापनाभिकीय अभिक्रिया दर के लिए विश्लेषिक परिणाम

अब हम ब्रह्माण्डीय तथा तारकीय नाभिकीय अभिक्रियाओं में निम्न ऊर्जा परास में घटित होने वाले प्रबल अनुनाद की स्थिति में अभिक्रिया संभाव्यता (4) के संवृत रूप आकलन के लिए प्रयास करेंगे। अनुनाद के निकट ऊर्जाओं पर अनुनाद अनुप्रस्ट काट गैर अनुनादी अनुप्रस्थ काटों (5) की अपेक्षा कई गुना अधिक परिमाण के होते हैं जिसके फलस्वरूप अनुनाद अभिक्रिया संभाव्यता (4) पर प्रधानता रखता है भले ही (2) में दिये कण वेग वितरण फलन पर वांछित समाकलन क्यों न किया जाय[8]।

A. ब्राइट-विग्नर अनुनादी अनुप्रस्थ काट

$E = Er$ पर, जहाँ Er अनुनादी ऊर्जा है, एकांकी अनुनाद के लिए नाभिकीय अभिक्रिया जों यौगिक नाभिक के निर्माण के रास्ते से होकर अग्रसर हो रही है, अनुप्रस्थ काट ϕ(E) को ब्राइट-विग्नर सूत्र (3) के पदों में ऊर्जा के फलन के रूप में लिखा जा सकता है-

$$\sigma(E) = \pi \lambda^2 \omega \Gamma j i \Gamma K_l / \left[\left(E_n - E\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\Gamma\right)^2 \right], \quad (12)$$

जहाँ

$\lambda = h / (2 \mu E)^{1/2}$ अवह्रासित ब्रोग्ली तरंगदैर्ध्य है जो दूरस्थ i तथा J कणों के बीच सापेक्ष गति के संगत है। (12) का प्रथम गुणक शून्य कोणीय संवेग वाली आंशिक तरंग के लिए अधिकतम सम्भव अनुप्रस्थ काट है। दूसरा सांख्यिकीय गुणक

$$w = (2J_i + 1)/[(2J_j + 1)(2J_j + 1)]$$

इकाई है और अभिक्रिया करने वाले कणों के आन्तरिक कोणीय संवेग या भ्रमियों को बताता है, जहाँ J अनुनादी दशा का कोणीय संवेग है, तथा J_i तथा J_J क्रमशः i तथा J प्रकार के कणों के कोणीय संवेग हैं। अनुनाद अवस्था की कुल चौड़ाई Γ $\Gamma = h/c = \Gamma ij + \Gamma KP + \ldots\ldots$, द्वारा व्यक्त की जाती है जहाँ τ दशा का प्रभावी जीवनकाल है। कण की चौड़ाई Γij i कणों के J के अल्पविसर्जन के लिए चौड़ाई है और Γ_{Kl} K तथा l कणों के उत्सर्जन हेतु आंशिक चौड़ाई है।

यौगिक नाभिक द्वारा किसी कण के अवशोषण हेतु आंशिक चौड़ाई Γij प्रबलतः ऊर्जा आश्रित फलन है और निम्नवत् लिखी जा सकती है-

$$\Gamma_{ij}' = \left(2^{3/2} \mu^{1/2} R_o D/h\right) E^{1/2} P(E) \quad (13)$$

जहाँ R_0 नाभिक के अन्दर न्यूक्लियानों का लाक्षणिक तरंगदैर्ध्य है, D यौगिक नाभिक की पड़ोसी दशाओं के मध्य ऊर्जा अन्तराल है और $P(E)$ कूलॉम अवरोध वेधन गुणक को बताता है। निम्न ऊर्जा पर शून्य

कोणीय संवेग अभिक्रियाएँ प्रधान होती हैं और अवरोध वेधन गुणक $P(E)$ को निम्नवत् लिखा जा सकता है-

$$P(E) = 2\pi\eta(E) \ \exp\langle -2\pi\eta(E)\rangle, \tag{14}$$

जहाँ $\eta(E)$ (6) में परिभाषित है।

सम्पूर्ण चौड़ाई जो यौगिक नाभिक की उत्तेजन ऊर्जा के साथ बढ़ती है, उसके लिए हम तदर्थ रैखिक ऊर्जा आश्रिता को निम्नलिखित रूप में कल्पित करते हैं–

$$\Gamma(E) = \Gamma_o + \Gamma_\perp E \tag{15}$$

जहाँ Γ_0 तथा $\Gamma_\perp$ नाभिकीय प्रयोगों में मापित आनुभविक अचर हैं।

(12) में (13)-(15) को प्रविष्ट करने पर हमें ब्राइट-विंगर एक अनुनादी-स्तर सूत्र का प्राचलीकृत रूप प्राप्त होता है-

$$\sigma(E) = \left[\frac{\pi^2 h^2}{2\mu E}\right]\left[\frac{2^{3/2}\mu^{1/2} R_o E^{1/2}}{h}\frac{2\pi\mu^{1/2} Z_i Z_j e^2}{2^{1/2} h E^{1/2}}\right.$$

$$\left.\times \exp. -\left\{\frac{2\pi\mu^{1/2} Z_i Z_j e^2}{2^{1/2} h E^{1/2}}\right\}\right] \times \left[\omega \frac{\Gamma_{kl} D}{(E_r - E)^2 + (\frac{1}{2}[\Gamma_o + \Gamma_1 E]^2}\right] \tag{16}$$

B. अनुनादी अभिक्रिया दर समाकल

हम अनुनादी अनुप्रस्थकाट (16) को (4) में रखते हैं और अनुनादी तापनाभिकीय अभिक्रिया के लिए अभिक्रिया संभाव्यता का निरूपण निम्नवत् प्राप्त करते हैं-

$$\langle\sigma v\rangle = (2\pi)^{5/2}\frac{Z_i Z_j e^2 R_o \omega \Gamma_{kl} D}{\mu^{1/2}(KT)^{3/2}} \times$$

$$\times \int_o^\infty \frac{\text{Exp} < -E/KT - \bar{q}/E^{1/2} > dE}{(E_r - E)^2 + (\frac{1}{2}[\Gamma_o + \Gamma_1 E]^2)} \tag{17}$$

जहाँ $\bar{q}$ को

$$\bar{q} = 2\pi\, (\mu/z)^{1/2}\, (Z_i\, Z_j\, e^2/h) = Z\, (KT)^{1/2} \tag{18}$$

द्वारा दर्शित किया जाता है और Z को (9) में परिभाषित किया जाता है।

हम (17) में से समाकल

$$R = \int_o^{\infty} \frac{\exp.\, \langle -E/KT - \bar{q}/E^{1/2} \rangle\, DE}{(E_r - E)^2 + (\frac{1}{2}\, [\Gamma_o + \Gamma_1\, E])^2} \tag{19}$$

को हटाते हैं, जिसे अधिक सुविधापूर्वक निम्नवत् लिखा जा सकता है—

$$R = \frac{1}{1 + (\frac{1}{2}\, \Gamma_{\perp})^2} \int_0^{\infty} \frac{\exp.\, \langle -E/KT - q/E^{1/2} \rangle\, dE}{(\tilde{E}_r - E)^2 + (\frac{1}{2}\, \tilde{\Gamma})^2} \tag{20}$$

जहाँ $\tilde{E}_r$ संशोधित अनुनाद ऊर्जा को बताता है।

$$\tilde{E}_r = \frac{\left(E_r - \frac{1}{4}\, \Gamma_0\, \Gamma_1\right)}{\left[\perp + \left(\frac{1}{2}\, \Gamma_1\right)^2\right]} \tag{21}$$

तथा $\tilde{\Gamma}$ परिवर्धित सम्पूर्ण चौड़ाई है

$$\tilde{\Gamma} = \frac{\left(\Gamma_0 + E_r\, \Gamma_1\right)}{\left[1 + \left(\frac{1}{2}\, \Gamma_L\right)^2\right]} \tag{22}$$

अनुनाद हर का Γ_o सहित रूप सुरक्षित रहता है यदि कोई $\Gamma_o \rightarrow \Gamma_o + \Gamma_1 E$ को रूपान्तरित करता है। चर $E = y/\,(1 + (1/2\;\Gamma E)^2)$ को चुनने पर

$$R\,(q,\, a,\, b,\, g) = \int_0^{\infty} \frac{\exp.\, \langle -\alpha y - q y^{-1/2} \rangle\, dy}{(b - y)^2 + g^2} \tag{23}$$

मिलता है जहाँ

$$a = 1/KT \left(1 + \left[\frac{1}{2}\, \Gamma 1\right]^2\right), \quad b = E_n - \frac{1}{4}\, \Gamma_o\, \Gamma_1$$

$$g = \frac{1}{2}\left(\Gamma_o + E_r \Gamma_1\right), \qquad q = \bar{q}\left(1 + \left[\frac{1}{2}\,\Gamma 1\right]^2\right)^{1/2} \tag{24}$$

अब हम (17) को (23) सहित पुनः अधिक सुविधाजनक रूप में लिख सकते हैं-

$$\langle \sigma v \rangle = (2\pi)^{5/2} \cdot \frac{Z_i Z_j C^2 R_o \omega \Gamma_{K \cdot l} D}{\mu^{1/2} (K T)^{3/2}} \frac{1}{\perp + \left(\frac{1}{2}\Gamma_1\right)^2} R(q, a, b, g) \tag{25}$$

C. अनुनादी अभिक्रिया दर समाकल तथा फाक्स के H-फलन का संवृत रूप में आकलन

ऐसी दशाओं को जानने के लिए जिनमें अनुप्रस्थ काट (7) के अनुसार कारक $S(E)$ को अनुनादी अनुप्रस्थ काट (16) में प्रविष्ट किया जावेगा, हम निम्नलिखित अधिक सामान्य समाकल पर विचार करते हैं–

$$R(q, a, b, g : v, n, m) = \int_0^\infty \frac{t^v \exp\langle -a t - q t^{-n/m} \rangle \, dt}{(b - t)^2 + g^2} \tag{26}$$

जिसमें $v = 0, n = 1,$ तथा $m = 2$ के लिए विशेष दशा के रूप में (23) सम्मिलित है हम (26) में हर $\left[(b-t)^2 + g^2\right]^{-1}$ को $g^2 > 0$ के लिए एक समतुल्य समाकल से प्रतिस्थापित करते हैं जो इस प्रकार है-

$$\frac{1}{(b-t)^2 + g^2} = \int_0^\infty \exp\langle -\left[(b-t)^2 + g^2\right] x \rangle \, dx \tag{27}$$

किन्तु हम निम्नवत् भी लिख सकते हैं।

$$e^{-x(b-t)^2} = \sum \frac{(-1)^K}{K!} \cdot x^K \times \sum_{K_1=0}^{2K} \binom{2K}{K_1} (-1)^{K_1} b^{2K-K_1} t^{K_1} \tag{28}$$

जहाँ उदाहरणस्वरूप

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\; m-n!}, \quad 0! = \perp$$

(26) – (28) से हमें

$$R_1(q, a, b, g; v, n, m) = \int_o^\infty Exp^{-g^2 x} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)^K}{K!} x^K dx \cdot \sum_{K_1=0}^{2K} \binom{2K}{K_1} \times$$

$$\times (-1)^{K_1} b^{2K - K_1} \int_0^\infty t^{V+K_1} \; Exp^{-at} \; Exp^{-1t^{-n/m}} \; dt \tag{29}$$

प्राप्त होता है। ध्यान रहे कि

$$\int_0^\infty x^K \exp^{-g^2 x} dx = \int_0^\infty x^{(K+1)-1} \exp^{-g^2 x} dx = \frac{K!}{g^2 (g^2) K} \tag{30}$$

यहाँ हम फाक्स के *H*-फलन के समाकल पद का मान निकालते हैं तो

$$\int_0^\infty t^{v+k_1} \cdot \exp^{-at} \cdot \exp^{-qt^{-n/m}} dt$$

$$= a^{-(v+K_1+1)} H_{0,2}^{2,0} \left[a^{n/m} q \left| \begin{matrix} ((a_j \cdot \alpha_j)) \; 1 \cdot p \\ (0, \perp), (\perp + v + K_1 : n/m), ((b_j, B_j))_{1q} \end{matrix} \right. \right]$$

(31)

यह देखा जा सकता हैं कि परिणाम (31) में विशिष्ट दशा के रूप में ($K = 0, q = z,$ $a = n = 1, m = z$) निहित रहते हैं। (29) में (30) तथा (31) का मान रखने पर :

$$R\,(q, a, b, g; \nu, n, m) = \frac{K!}{g^2 (g^2)^K} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)^K}{K!} \sum_{K_1=0}^{2K} \binom{2K}{K_1} \times$$

$$\times (-1)^{K_1} (b)^{2K - K_1} a^{-(\nu + K_1 + 1)} \times$$

$$\times H_{0,2}^{2,0} \left[a^{n/m} q \left| \begin{matrix} ((a_j, \alpha_j)) \; 1, p \\ (0, 1)(1 + \nu + K_1 : n/m), ((b_j, B_j))_{1,q} \end{matrix} \right. \right] \tag{32}$$

विशिष्ट दशा : यदि हम (32) में (23) $R_1\,(q, a, b, g, 0, 1, 2)$ प्राप्त करने के लिए n= 1, m=2, $\nu = 0$ रखते हैं तो

$$R_1\,(q, a, b, g) = \frac{1}{g^2 a} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)^K}{(g^2)^K} \sum_{K_1=0}^{2K} \binom{2K}{K_1} \times \frac{(-1)^{K_1}}{a^{K_1}} b^{2K-K_1} \times$$

$$H^{2,0}_{0,2}\left[a^{1/2}q \,\middle|\, \begin{matrix} ((a_j, \alpha_j))_{1,p} \\ (0, 1)(1+K_1 : 1/2), ((b_j, B_j))_{1,q})) \end{matrix}\right] \quad (33)$$

जहाँ $(b-v/a)^2/g^2<1$, तथा $v = (q\sqrt{a})^{-1/3}$

IV निष्कर्ष

(1) गैर अनुनादी नाभिकीय अनुप्रस्थ काट की मुख्य ऊर्जा आश्रिता गैमो भेदन गुणक से आती है[5] जो कूलॉम तरंग फलकों के लिए श्राडिंगर समीकरण के हल पर आधारित है।

(2) अनुनादी ताप नाभिकीय अभिक्रिया दर के संवृत रूप निरूपण को व्युत्पन्न करने के लिए हमने ब्राइट-विग्नर[6] के सूत्र पर विचार किया। हमने अनुनादी तथा गैर अनुनादी ताप-नाभिकीय अभिक्रिया दरों के संवृत रूप निरूपण का सीधा सम्बन्ध

$$\left(H^{p,o}_{o,p}\left[Z \,\middle|\, ((b_1, \ldots\ldots b_q))\right]\right)$$

प्रकार के फाक्स के H-फलन के माध्यम से प्राप्त किया।

शब्दावली

अनुनाद तापनाभिकीय अभिक्रिया	Resonant thermonuclear reaction.
संवृत रूप निरूपण	Closed form representation
तारकीय	Stellar
लक्ष्य नाभिक	Target nuclei
प्रभावी अनुप्रस्थ काट	Effective cross section
परिक्षेपण	Dispersion
उत्तेजन	Excitation
अवरोध भेदन गुणक	Barrier penetration factor

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय जर्मनी के प्रो० डॉ० एच. जे. हौबोल्ड तथा डॉ० ए. एम. मथाई (मांट्रियल, कनाडा) के अभारी हैं जिन्होंने इस शोधकार्य में रुचि ली।

निर्देश

1. वहकाल, जे. एन., Astrophys. J. 1966, 143, 259.

2. क्रिचफील्ड, सी. एम., In Cosmology, Fusion and other Matter, George Gamow Memorial Volume, Edited by F. Reines (Univ. Colorado P., Boulder). (1972).

3. क्लेटन, डी. डी. , Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis (McGraw-Hill, New York). (1968).

4. फ्रैंक्ट कामेनेकिज, डी. ए., Physikalosche Prozesse in Inneren con Sternen Fizmatgiz, Moskow (रूसी में). (1959).

5. फाउलर, डब्ल्यू. ए., Rev. Mod. Phys, 1984, 56, 146.

6. हौबोल्ड, एच. जे. तथा मथाई, ए. एम., Ann. Phys., (लीपजिग) 1984, 41, 380.

7. हौबोल्ड, एच. जे. तथा जान, आर. डब्लू., Astron Nachr, 1982, 303, 161.

8. मथाई, ए. एम. तथा सक्सेना, आर. के. Generalized Hypergeometric Functions with Applications in Statistics and Physical Science, Lecture Notes in Mathematics, 1973. Vol., 348 (Springer, Berlin).

9. वही, H.Function with Application in Statistics and other Disciplines (Wilay Eastern Ltd.), (1978).

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 44, No. 2, April 2001.

अर्धचालक प्लाज्मा में प्रत्यावर्ती धारा क्षेत्र की उपस्थिति में हेलिकान

आर. के. दुबे तथा वाई. बी. शुक्ला
गणित विभाग, शासकीय माडेल साइंस कालेज, रीवाँ (म. प्र.)

तथा

के. डी. मिश्रा
सम्प्रयुक्त भौतिकी विभाग, इंस्टीट्यूट ऑफ टेक्नालॉजी,
बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी (उ. प्र.)

[प्राप्त – जनवरी 11, 2000]

सारांश

अर्धचालक प्लाज्मा में हेलिकान संचरण की संपरीक्षा बाहर से प्रयुक्त प्रत्यावर्ती वैद्युत क्षेत्र की उपस्थिति में की गई है। प्राप्त परिणाम अतिचालक संरचना हेतु परिक्षेपण सम्बन्ध ज्ञात करने में उपयोगी है।

Abstract

Helicons in the presence of an A. C. field in semi conducting plasma. *By* R. K. Duby and Y. B. Shukla, Department of Mathematics, Govt. Model Science College, Rewa (M. P.) and K. D. Misra, Dept. of Applied Physics, Institute of Technology, B. H. U. Varanasi-221 005

Helicon propagation in semi conducting plasma is examined in the presence of an externally applied a. c. electric field. Particle trajectories in perturbed and unperturbed coordinates in the presence of the applied a. c. field are determined and used for evaluating the perturbed distribution function, conductivities, and dielectric tensors. These results are used to find the dipersion relation for a superlattice structure. Application of this study for visualizing many observable effects through experiments and computer simulations are suggested.

1. प्रस्तावना

यह भलीभांति ज्ञात है कि प्रबल बाह्यतः प्रयुक्त चुम्बकीय क्षेत्र के प्रभाव में चालक माध्यम (यथा धातुएँ, अर्ध चालक आदि) उन वैद्युत चुम्बकीय तरंगों के संचरण को सहायता पहुँचा सकती हैं जो अनुप्रस्थ, वृत्त ध्रुवित होती हैं और बाह्य चुम्बकीय क्षेत्र की अक्षि के साथ संचरण करती हैं। 1960 में ऐंग्रेन ने[1] ऐसी तरंगों का नामकरण हेलिकान तरंगें किया क्योंकि वैद्युत क्षेत्र का स्वरूप कुंडली के आकार का होता है। हेलिकान तरंगें सामान्यतया मन्द, क्षतिरहित तथा सुविधाजनक आवृत्ति क्षेत्र में विस्तार करती हैं जिसमें ठोस अवस्था भौतिकी में प्रयोगात्मक कार्य हो सकता है। हेलिकानों का प्रावस्था वेग निर्वात में प्रकाश के कई गुना मैग्नीट्यूड कम होता है। हैलिकान तरंगों पर प्रचुर साहित्य उपलब्ध है।[2-9]

प्रत्यावर्ती क्षेत्र तथा ठोस अवस्था प्लाज्मा की अन्योन्य क्रिया उपयुक्त वरण आयाम तथा कथित संकेत की आवृत्ति को शमित करने या उद्दीप्त करने में उपयोगी है। प्रत्यावर्ती धारा क्षेत्र की आवृत्ति को इस तरह चुनना होता है जिससे कि यह प्लाज्मा में ठीक तरह से प्रविष्ठ हो सके[10, 17] और अरैखिक घटना की सम्भावना को बहिष्कृत करने के लिए प्रत्यावर्ती धारा क्षेत्र की आवृत्ति को प्लाज्मा आवृत्ति से काफी नीचे लिया जाता है।[12]

फिर भी हेलिकान तंरग संचरण एक दिक रूप से एक समान, अनपभ्रष्ट, टक्कररहित प्लाज्मा तंत्र है जिसमें निश्चित विस्तार की इलेक्ट्रानिक संरचना उच्च आवृत्ति वाले प्रत्यावर्ती वैद्युत क्षेत्र (ac) या उच्च ऊर्जा क्षेत्रों यथा लेसरों द्वारा किरणित की उपस्थिति में है जिसका विस्तार से अध्ययन नहीं हुआ। इससे अभिप्रेरित होकर इस प्रपत्र में उपयुक्त भौतिक परिस्थितियों के अन्तर्गत हेलिकान तरंग संचरण का अध्ययन किया गया है।

हमने हैरिस[13] के कार्य से गणितीय परिणामों को व्युत्पन्न करने की अत्यधिक सामान्य विधि ग्रहण की है। पूर्णांशों की विधि में कण प्रक्षेपपथों का उपयोग विक्षुब्ध वितरण फलन की गणना के लिए किया गया है जिससे चालकताओं तथा परावैद्युत प्रदिशों का परिकलन हुआ है। यह विधि अनेक कम्प्यूटर अनुकरण प्रविधियों के लिए भी उपयुक्त है।

इस प्रपत्र में हमने अपने को केवल हेलिकान तरंग के संचरण पक्ष तक ही सीमित रखा है। तरंग अस्थायित्व, क्षणिक अनुक्रिया, फोकसन तथा अन्य संबद्ध घटनाएँ विचाराधीन हैं।

2. मूल सिद्धान्त

बाह्य क्षेत्र के प्रति अर्ध चालकों तथा धातुओं की अनुक्रिया बहुज्ञात है। परिक्षेपण सम्बन्ध दिक रूप से एकसमान अनपभ्रष्ट, समांग टक्कररहित अर्ध चालन इलेक्ट्रान प्लाज्मा से व्युत्पन्न किया जाता है जिसमें यह कल्पना की जाती है कि भारी आयन गतिमान नहीं है। चुम्बकीय प्लाज्मा गुणधर्म जिन पर विचार किया जाना है वे निम्नांकित कल्पनाओं पर आधारित हैं-

(i) समय मापक्रमों को ऐसा चुना जाता है कि वह मैक्सवेली वितरण के अनुरूप होता है। क्षेत्र तथा प्लाज्मा प्राचल प्रतिबन्ध को तुष्ट करते हैं जहाँ Wc प्ररिभ्रमण आवृत्ति है तथा λ चालन इलेक्ट्रानों का विश्रांति काल है।

(ii) शून्य कोटिक काल-आश्रित वितरण फलन पर बाहर से प्रयुक्त प्रत्यावर्ती क्षेत्र के प्रभाव को बोल्ट्मान समीकरण के सही हल के लिए सम्मिलित कर लिया गया है।

(iii) प्रत्यावर्ती धारा संकेत की आवृत्ति वाहकों की प्ररिभ्रमण आवृत्ति तथा प्लाज्मा आवृत्ति से काफी नीचे है।

(iv) आवेश वाहकों पर प्रत्यावर्ती धारा क्षेत्र द्वारा प्रेरित वेग पृष्ठ भूमिक इलेक्ट्रानों के तापज़ वेग की अपेक्षा काफी छोटा है।

(v) अपवाह वेग प्रावस्था वेग की तुलना में छोटा है और वाहकों के धावन पथ प्रतिबन्धों को बहुष्कृत कर दिया गया है।

चुम्बकीय स्थैतिक तथा वैद्युत स्थैतिक क्षेत्रों को z-अक्षि में प्रयुक्त किया जाता है। हेलिकान तरंगें z-अक्षि में संचरित होती हैं और प्रेरित प्लाज्मा विक्षोभों को form exp $[\,i\,(K\,.\,r - wt)\,]$ के हार्मोनिक मान लिया जाता है।

इन प्रतिबन्धों के अन्तर्गत आवेश वाहकों का वितरण फलन युग्मित मैक्सवेल-बोल्ट्जमान समीकरण द्वारा बतलाया जाना होता है जो रैखिकीकरण के बाद निम्न रूप में प्राप्त होता है—

$$u \cdot \frac{\partial f_o}{\partial r} + \frac{F}{m^o} \cdot \frac{\partial f_o}{\partial u} = 0 \tag{1}$$

तथा

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial f_1}{\partial r} + \frac{F}{m^o} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial u} = S(r, u, t) \tag{2}$$

जहाँ

$$F = e\left(E_o \sin \nu' t + \frac{u \times B_o}{c}\right) \tag{3}$$

$$S(r, u, t) = -\frac{e}{m^o}\left\{E_1 + \frac{u \times B_1}{c}\right\} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial u} \tag{4}$$

यहाँ पर r सामूहिक निर्देशांक है, u सामूहिक वेग है, f_0 तथा f_1 क्रमशः प्लाज्मा के अक्षुब्ध

तथा क्षुब्ध वितरण फलन हैं, m^0 इलेक्ट्रान की ह्रासित संहति है और अन्य पदों के यथावत् अर्थ हैं। प्लाज्मा के वैद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्र आत्म संगत मैक्सवेल समीकरणों द्वारा नियमित हैं।

$$\nabla \cdot E = 4\pi e \int d^3 u\, f, \qquad \nabla \times E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} \tag{5}$$

$$\nabla . B = 0, \qquad V \times B = \frac{4\pi e}{c} \int d^3 u\; u f + \frac{\epsilon_b}{c}\frac{\partial E}{\partial t} \tag{6}$$

जहाँ ε_b पदार्थ का पृष्ठभूमि परावैद्युत स्थिरांक है। समीकरण (1) की तुष्टि होती है यदि f_o (r . u) अक्षुब्ध क्षेत्रों में आवेश वाहकों की गति का फलन हो। समांग प्लाज्मा के लिए (1) के अतिसामान्य हल का रूप होगा-

$$f_o = f_o\left(u_\perp^2,\; u_z^2\right) \tag{7}$$

जहाँ

$$u_\perp^2 = f_o\left(u_x^2 + u_y^2\right)$$

क्षुब्ध वितरण फलन f_1 के लिए आशिक अवकल समीकरण (2) का हल पूर्णांश विधि से[13] प्राप्त किया है और इसे निम्नवत् लिखा जा सकता है

$$f_1\,(r, u, t) = \int_{-\infty}^{t} dt'\, S\left[r\left(r_o, u_o, t\right),\; u\left(r_o, u_o, t - t'\right), t \right] \tag{8}$$

अथवा चरों के परिवर्तन से

$$f_1\,(r, u, t) = \int_0^{\infty} dt'\; S\left[r_o\,(r, u, t'),\, u_o(r, u, t'),\, t - t' \right] \tag{9}$$

जहाँ r_o एवं u_o समय $t=0$ पर r तथा u के मान हैं।

आवेश युक्त कण की गति के समीकरणों को निश्चित काल पर आधारित बाह्यतः प्रयुक्त प्रत्यावर्ती धारा क्षेत्र तथा चुम्बकीय क्षेत्र की उपस्थिति में हल किया गया है जिससे अक्षुब्ध निर्देशांकों में कण प्रक्षेप पथों को प्राप्त किया जा सकता है।

$$x_o = x + \frac{u_y}{\omega_c} - \frac{1}{\omega_c}\left(u_x \sin \omega_c t' + u_y \cos \omega_c t'\right) \tag{10}$$

$$y_o = y - \frac{u_x}{\omega_c} + \frac{1}{\omega_c} \left(u_x \cos \omega_c t' - u_y \sin \omega_c t' \right) \tag{11}$$

$$z_o = z - u_z t' + \frac{\Gamma_z}{v'^2} \sin v' t' - \frac{\Gamma_{z'}}{v} t' \tag{12}$$

तथा वेगों को

$$u_{xo} = u_x \cos \omega_c t' - u_y \sin \omega_c t', \tag{13}$$

$$u_{yo} = u_x \sin \omega_c t' + u_y \cos \omega_c t' \tag{14}$$

$$u_{zo} = u_z + \frac{\Gamma_z}{\nu'} (\cos \nu' t' - 1) \tag{15}$$

के रूप में जहाँ $\omega_c = e B_o / m^o$ साइक्लोट्रान आवृत्ति है तथा

$$\Gamma_z = e E_o / m^o$$

मैक्सवेल के कर्ल E समीकरण का उपयोग निम्नांकित रूप में

$$B_1 = \frac{c}{\omega} \{k \times E_1) \tag{16}$$

करने पर S(r, u, t) निम्नवत् प्राप्त होते हैं—

$$S(r, u, t) = \frac{e}{m^0 \omega} e^{i(k.r - \omega t)} \left[(\omega - k.u) E_1 + (u.E_1) k \right] \frac{df_o}{du} \tag{17}$$

अक्षुब्ध निर्देशांकों में (17) को उलटा करने पर

$$S\left(r_o, u_o, t - t'\right) = \frac{e}{m^o \omega} e^{i[k.r_o(r, u, t') - \omega(t - t')]}$$

$$\times \left[(\omega - k.u_o) E_1 + [u_o . E_1) k] \frac{\partial f_o}{\partial u} \right] \tag{18}$$

(9) में (10, (11), (12), (13), (14), (15) एवं (18) का मान रखने तथा कतिपय गणितीय परिकलनों के फलस्वरूप

$$\left[(\omega - k \cdot u_o) E_1 + (u_o \cdot E_1) k \right] \frac{\partial f_o}{\partial u}$$

$$= \frac{1}{u_1} \frac{\partial f_o}{\partial u_1} \Big\{ (\omega - k_z u_z) E_\perp u_\perp \cos(\omega_c t + \theta) + E_z k_\perp u_\perp u_z \cos(\omega_c t + \alpha)$$

$$+ \frac{\Gamma_z u_\perp}{\nu'} (\cos \nu' t - 1) \left[E_z k_\perp \cos(\omega_c t + \alpha) - E_\perp k_z \cos(\omega_c t + \theta) \right] \Big\}$$

$$+ \frac{\partial f_o}{\partial u_z} \left\{ \left[\omega - k_\perp u_\perp \cos(\omega_c t + \alpha) E_z + k_z u_\perp E_\perp \cos(\omega_c t + \theta) \right] \right\} \quad (19)$$

प्राप्त होता है तथा गुणक (factor) के लिए

$$e^{i[k \cdot r_0 - \omega(t-t')]} = e^{i(k \cdot r - \omega t)} \sum_m \sum_n \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_m (k_\perp u_\perp / \omega_c) J_n (k_\perp u_\perp / \omega_c)$$

$$\times J_p (k_z \Gamma_z / \nu'^2) e^{i(m-n)\alpha} e^{i(\omega - k_z u_z - k_z \Gamma_z/\nu' + p\nu' - n\omega_c) t'} \quad (20)$$

यहाँ पर α कोण है $k_\perp$ तथा $\mu_\perp$ के मध्य का और θ कोण है $u_\perp$ तथा $E_\perp$ के मध्य का।

प्लाज्मा के अक्षुब्ध वितरण फलन f_1 को प्राप्त करने के लिए (18) में (19) तथा (20) को प्रतिस्थापित करते हैं और इस तरह से $S(r_o, u_o, t - t')$ के लिए प्राप्त परिणामी व्यंजक को (9) में प्रयुक्त किया जाता है जिस पर वेगदिक् समाकलन किया जाता है। यहाँ पर इसी लक्ष्य को $\partial f_o / \partial u_{\perp o}$ एवं $\partial f_o / \partial u_{zo}$ में रूपान्तरित करके प्राप्त किया गया है जिससे समाकलन प्रक्रम में सर्वत्र केवल अक्षुब्ध मात्राएँ प्रकट हों और इस तरह समाकल गति के अचरों की तुष्टि हो।

इस प्रकार

$$f_1(r, u, t) = -\frac{e^{i(k \cdot r - \omega t)}}{m^o \omega} e \sum_m \sum_n \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_{m,n}(\lambda_1) J_p(\lambda_2) e^{i(m-n)\alpha}$$

$$\times \int_0^\infty \Bigg(\frac{1}{u_\perp} \frac{\partial f_o}{\partial u_\perp} \Big\{ (\omega - k_z u_z) E_\perp u_\perp \cos(\omega_c t' + \theta) + E_\perp k_\perp u_z u_\perp \cos(\omega_c t' + \alpha)$$

$$+ \frac{\Gamma_z u_\perp}{\nu'} (\cos \nu' t' - 1) \; [E_z k_\perp \cos(\omega_c t' + \alpha) - E_\perp k_z \cos(\omega_c t' + \theta)] \Big\}$$

$$\times \frac{\partial f_o}{\partial u_z} \{ [\omega - k_\perp u_\perp \cos(\omega_c t' + \alpha)] \; E_z + E_\perp k_z u_\perp \cos(\omega_c t' + \theta) \} \Bigg)$$

$$\times \; e^{i(\omega - k_z u_z - k_z \Gamma_z/\nu' + p\nu' - \omega_c) \, t'} \tag{21}$$

अथवा

$$f_1(r, u, t) = -\frac{e}{m^o \omega} \sum_m \sum_n \sum_p \frac{J_m(\lambda_1) J_P(\lambda_2) \, e^{i(m-n)\alpha}}{\omega - k_z u_z - k \Gamma_z/\nu - \omega_c + p\nu'}$$

$$\times \left(U^o E_{1x} (n/\lambda_1) \, J_n(\lambda_1) - i \, U^o E_{1y} \, J_n'(\lambda_1) + W^o E_{1z} \, J_n(\lambda_1) \right) \tag{22}$$

जहाँ

$$U^o = \frac{1}{u_\perp} \frac{\partial f_o}{\partial u_\perp} \left((\omega - k_z u_z) u_\perp + \frac{\Gamma_z k_z u_z}{\nu'} \left\{ 1 - \frac{P}{\lambda_2} \right\} \right) + \frac{\partial f_o}{\partial u_z} k_z u_\perp,$$

$$W^o = \frac{1}{u_\perp} \frac{\partial f_o}{\partial u_\perp} \left((u_z \omega_c - \frac{\Gamma_z}{\nu'} \omega_c \left\{ 1 - \frac{P}{\lambda_2} \right\} \right) + \frac{\partial f_o}{\partial u_z} (\omega - \omega_c)$$

$$\lambda_1 = \frac{k_\perp u_\perp}{\omega_c}, \quad \lambda_2 = \frac{\Gamma_z k_z}{\nu'^2}, \quad \text{तथा} \quad J_n'(\lambda_1) = \frac{d J_n(\lambda_1)}{d\lambda_1}$$

(22) में निम्नलिखित आवर्ती सम्बन्धों का प्रयोग व्यजंक को दिये रूप

$$J_{n+1} + J_{n-1} = \frac{2n}{\lambda} J_n \quad \text{तथा} \quad J_{n+1} - J_{n-1} = 2 J_n'$$

में लिखने के लिए किया गया है। जहाँ ध्यातव्य है कि जब बाह्य प्रत्यावर्ती धारा क्षेत्र के योगदानों को हटा लिया जाता है तो (22) हैरिस के[13] समीकरण (3.40) में समानीत हो जाता है। एक बार f_l निर्धारित हो जाने पर प्लाज्मा के धारा घनत्व को

$$J = e \int d^3 u f_1 (u) \, u$$

से अथवा चालकता $\| \sigma(k, \omega) \|$ के पदों

$$J = \| \sigma (k, \omega) \| \cdot E_1 \tag{23}$$

में प्राप्त किया जाता है तथा **(23)** ही सहायता से चालकता टेंसर को निम्नवत् लिखा जाता है-

$$\sigma (k, \omega) = - \frac{e^2}{m^o \omega} \sum_n \sum_p J_{(\lambda_2)} \frac{S^o_{ij}}{\omega - k_z u_z - k_z \Gamma_z / \nu' + p \nu' - \omega_c} \tag{24}$$

जहाँ

$$S^o_{ij} = \begin{pmatrix} u_z U^o \{ (n/\lambda_1) J_n \}^2 & i u_z U^o (n/\lambda_1) J_n J_n' & u_z U^o (n/\lambda_1) J_n^2 \\ i u_z U^o (n/\lambda_1) J_n J_n' & u_\perp U^o J_n'^2 & i u_z W^o J_n J_n' \\ u_z U^o (n/\lambda_1) J_n^2 & -i u_z U^o J_n J_n' & u_z W^o J_n^2 \end{pmatrix}$$

मैक्सवेल के कर्ल समीकरणों से क्षुब्ध मात्राओं के लिए तरंग समीकरण

$$\nabla (\nabla \cdot E_1) - \nabla^2 E_1 - \omega^2/c^2 \ [\| \in (k, \omega) \|] \cdot E_1 = 0 \tag{26}$$

प्राप्त होता है, जहाँ

$$\| \varepsilon (k, \omega) \| = \varepsilon_b \left(1 - \frac{4\pi}{i \omega \varepsilon_b} \| \sigma (k, \omega) \| \right) \tag{27}$$

परावैद्युत प्रदिश है।

3. परिक्षेपण सम्बन्ध

सार्वीकृत परावैद्युत प्रदिश $\| \in (k, \omega) \|$ को संचरण के तरह तरह से सरल प्रसंगों के लिए परिक्षेपण सम्बन्ध प्राप्त करने के काम में लाया जा सकता है किन्तु अतिजालक वृद्धि अक्षि (*z*-अक्षि पर) के समान्तर तरंग संचरण के मामले में, तरंग अनुप्रस्थ वृत्ततः ध्रुवित हो जाती है जिसमें हेलिकान (LHP तरंगें) तंत्र में संचरण करती हैं। हेलिकानों के लिए तरंग समीकरण (20) को निम्नांकित रूप में संशोधित किया जा सकता है—

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon_{xx} + i \varepsilon_{xy}) \right) \cdot E_1 = 0 \tag{28}$$

जहाँ $E_1 = E_{1x} + i\, E_{1y}$ तथा ε_{xx},, ε_{xy} परावैद्युत प्रदिश के घटक हैं।

परावैद्युत प्रदिश के घटकों ε_{xx} तथा ε_{xy} को (24) तथा (27) की सहायता से प्राप्त किया जाता है। इस तरह से प्राप्त समीकरण को निम्नवत् दर्शाया जाता है-

$$\varepsilon_{xx} + i\,\varepsilon_{xy} = \varepsilon_b \left(1 - \frac{4\pi e^2}{m^o \varepsilon_b \omega^2} \int d^3 u \, \frac{u_\perp}{2} \sum_P J_P(\lambda_2) \frac{\partial f_0}{\partial u_\perp} (\omega - k_z u_z) + \frac{\partial f_o}{\partial u_z} k_z u_\perp + \frac{\partial f_o}{\partial u_\perp} \frac{k_z \Gamma_z}{\nu'} u_\perp \left\{ 1 - \frac{P}{\lambda_2} \right\} \right) \frac{1}{\omega - k_z u_z - k_z \Gamma_z/\nu' + P\nu' - \omega_c} \tag{29}$$

समीकरण (29) को अक्षुब्ध वितरण फलन को लेकर हल किया जा सकता है, जिसे इस प्रकार लिखते हैं—

$$f_o(r, u, t) = \frac{n_o}{\pi^{3/2} \alpha^3} \exp\left(- \frac{u_{\perp o} + [u_{\perp o} - \Gamma_z/\nu' (\cos \nu' t - 1)]^2}{\alpha^2} \right) \tag{30}$$

जहाँ α इलेक्ट्रानों का तापज़ वेग है। ध्यान दें कि (30) से शून्य कोटिक समीकरण (1) की तुष्टि होती है। (29) में (30) को प्रतिस्थापित करने तथा प्राप्त व्यजंक को फ्राइड तथा कान्टे प्लाज्मा परिक्षेपण फलन $Z(\xi)$[14] के रूप में लिखने पर

$$\varepsilon_{xx} + i\,\varepsilon_{xy} = \varepsilon_b \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \sum_P J_P(\lambda_2) \frac{\omega^o}{k_z \sqrt{2}\, \alpha} Z(\xi) \right) \tag{31}$$

प्राप्त होता है जहाँ

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi n_o e^2}{\varepsilon_b m^o}, \qquad \xi = \frac{\omega - k_z \Gamma_z/\nu' + p\nu' - \omega_c}{k_z \sqrt{2}\, \alpha}$$

तथा $\omega^o = \omega - k_z \Gamma_z/\nu' + p\nu'$

ξ के वृहत मानों के लिए अर्थात् $|\xi| >> |$ जो हेलिकानों के लिए दशा है, फलन $Z(\xi)$ को इसके उपगामी विस्तार के कतिपय पदों द्वारा समतुल्य कर दिया गया है-

$$Z(\xi) = -\frac{1}{\xi} \left(1 + \frac{1}{2\xi^2} \right) \tag{32}$$

(31) में (32) से z (ξ) का मान रखने पर परिणामी परावैद्युत प्रदिश प्राप्त होता है जो इस तरह है—

$$\varepsilon_{xx} + i\,\varepsilon_{xy} = \varepsilon_b \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \sum_p J_P\,(\lambda_2)\,\omega^o \left\{ \frac{1}{\omega^o - \omega_c} + \frac{\tilde{A}^2\,\omega_c{}^2}{o(mega^o - \omega_c{}^2} \right\} \right) \tag{33}$$

जहाँ $\tilde{A}^2 = k_z^2\,\alpha^2 / \omega c^2$

इस तरह (33) की सहायता से समांग तरंग समीकरण (28) को निम्न रूप में लिखा जा सकता है-

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2\,\varepsilon_b}{c^2}\,\varepsilon^+ \right) E_1 = 0 \tag{34}$$

जहाँ

$$\varepsilon^+ = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \sum_p J_p\,(\lambda_2)\,\omega^o \left\{ \frac{1}{\omega^o - \omega_c} + \frac{\tilde{A}^2\,\omega c^2}{(\omega^o - \omega_c)^3} \right\} \right)$$

आगे के विश्लेषण में (34) का उपयोग सरल दशा p = 1 के लिए किया गया है तथा बेसेल फलन Jp का संकलन लगभग इकाई मान लिया गया है।

z-अक्षि में संचरण कर रही समतल तरंग के लिए जिसका तरंग वेक्टर Kz है सामान्य संचरण सम्बन्ध को निम्नवत् लिखा जाता है—

$$\frac{c^2 k_z^2}{\omega^2} = \varepsilon - \frac{\Omega_p^2}{\omega^2} \sum_p J_p\,(\lambda_2)\,\omega^o \left(\frac{1}{\omega^o - \omega_c} + \frac{\tilde{A}^2\,\omega c^2}{(\omega^o - \omega_c)^3} \right)$$

जहाँ $\Omega_p^2 = \omega_p^2 \in$

यही काफी सामान्य संचरण समीकरण है और इसमें पूर्व प्राप्त परिणामों के सारे प्रभाव निहित हैं जिन्हें कण विश्लेषण की विद्यमान किन्हीं भी विधियों से प्राप्त किया गया था।

निर्देश

1. ऐग्रेन, यी.: In Proceeding of the International Conference on Semiconductor Physics, Prague 1960 (Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, (1960) p. 224.

2. सोलीमर, एल. तथा लैशमोर, सी. एन. DAVIES,: International Journal of Electronics, 1967, 22,, 549.

3. मोर्गन, डी. पी.: Phys, Stat. Sol., 1967, 24, 9.

4. कानवेल, ई. एम.: High Field Transport in Semiconductors Suppl. 9, Academic Press, New York, (1967).

5. स्टीले, एम. सी. तथा वुरल, ब्री. : Wave Interaction in Solid State Plasma, McGraw Hill Publ., Co. New York, (1969).

6. केनर, ई. तथा याकोवेंको, वी. एम. : Soviet Phys. J. Exp. Theo. Physics, 1986, 26, 446.

7. याकोवेंको, वी. एम.: Soviet Phys. Solid State, 1982, 24, 249.

8. चेन, एफ. एफ. तथा वाकुम, जे. : Sci. and Technol., 1992, 10, 1389.

9. मिश्रा, के. डी. तथा पाण्डेय, एम. के. Physics Stat. Sol., 1994, (b) 182, 153.

10. पेट्रोशोव, वी. टी.: Rep. Progr. Phys. 1965, 47, 47.

11. यू, एम., ऐलीव तथा सिलिन, वी. पी.: Soviet Phys. J. Exper. Theo. Phys., 1965, 21, 601.

12. इवानोव, ए. ए., Rev. Plasma Phys. 1975, 6, 161.

13. हैरिस, ई. जी. : Physics of Hot Plasma, (eds.) B. J. Rye and J. C. Taylor, Plenum Press, New York, (1970).

14. फ्राइड, बी. डी. तथा कान्टे, एस. डी.: The Plasma Dispersion Function, Academic Press, New York (1961).

प्रयुक्त शब्दावली के अंग्रेजी पर्याय

संचरण	...	...	Propagation
प्रावस्था वेग	...	...	Phase Velocity
ठोस अवस्था प्लाज्मा	...	...	Solid State Plasma
आयाम	...	...	Amplitude
अरैखिक घटना	...	...	Non linear Phenomenon
हेलिकान तरंग	...	...	Helium Wave
प्रक्षेप पथ	...	...	Trajectory
क्षुब्ध वितरण	...	...	Perturbed distribution
परावैद्युत प्रदिश	...	...	Dieletric tensor
परिक्षेपण	...	...	Dispersion
परिभ्रमण आवृत्ति	...	...	Gyro-frequency
विश्रांति काल	...	...	Relaxation time
पृष्ठ भूमिक इलेक्ट्रान	...	...	Background electron
अपवाह वेग	...	...	Drive velocity
रैखिकीकरण	...	...	Linearisation
निर्देशांक	...	...	Coordinate
अतिजालक वृद्धि	...	...	Superlattice growth
समतल तरंग	...	...	Plane wave
वृत्त ध्रुवित	...	...	Circularly polarized
पूर्णांश	...	...	Characteristics

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 44, No.2, April 2001.

बहुचरीय H-फलन तथा सामान्य बहुपदों वाला आंशिक समाकल आपरेटर

ओ. पी. गर्ग तथा वीरेन्द्र कुमार
एम. एम. एच. कालेज, गाजियाबाद (उ. प्र.)

[प्राप्त - अगस्त 28, 1999]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में सामान्य श्रेणी के बहुचरीय बहुपदों तथा बहुचरीय H-फलन के गुणनफल वाले सार्वीकृत आंशिक समाकल सूत्र का समावेश किया गया है। हमारे मुख्य सूत्र की कुछ विशिष्ट दशाओं का संक्षिप्त उल्लेख भी हुआ है।

Abstract

On a fractional integral operator involving mulvivatriable H-function and general polynomials. *By* O. P. Garg and Virendra Kumar, M. M. H. College, Ghaziabad (U. P.).

In the present paper we introduce a generalized fractional integral formula involving the product of a general class of multivariable polynomials and multivariable H-function. On account of the general nature of the operator involving generalized polynomial set as its kernel and due to the general class of multivariable polynomials and multivariable H-function, our findings provide interesting unification and extension of a number of (known and new) results. Some new special cases of our main formula are mentioned briefly.

1. प्रस्तावना तथा परिभाषाएँ

r-संमिश्र चरों वाले H-फलन का सूत्रपात श्रीवास्तव तथा पंडा[1] ने किया। हम उसे बताने के लिए निम्नांकित संकुचित रूप [5, p. 251, eqn (1)) का प्रयोग करेंगे।

$$H[Z_1, \ldots\ldots\ldots\ldots, Z_r] = H^{o,n;m_1,n_1;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;m_r,n_r}_{p,q;p_1,q_1;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;p_r,q_r}$$

$$\left[\begin{matrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ z_r \end{matrix}\left| \begin{matrix} (a_j ; \alpha_j' \,\ldots\ldots, \alpha_j^r)_{1,\, p} : (c_j', \gamma_j')_{1,\, p_1} ; \,\ldots\ldots ; (c_j^r, \gamma_j^r)_{1,\, p_r} \\ (b_j ; \beta_j', \,\ldots\ldots, \beta_j^r)_{1,\, q} : (d_j', \delta_j')_{1,\, q_1} ; \,\ldots\ldots ; (d_j^r, \delta_j^r)_{1,\, q_r} \end{matrix}\right.\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi\omega)^r} \int_{L_1} \cdot\cdot \int_{L_r} \phi_1(\xi_1) \ldots \phi_r(\xi_r) \Psi(\xi_1, \ldots, \xi_r) z_1^{\xi_1} \ldots z_r^{\xi_r} d\xi_1 \ldots d\xi_r \tag{1.1}$$

जहाँ $\omega = \sqrt{-1}$

उपर्युक्त बहुचरी H-फलन के अभिसरण, अस्तित्व तथा अन्य विस्तृत विवरणों के लिए श्रीवास्तव इत्यादि [10, p. 251-253. Eqns. (C.2) - (C.8)] की पुस्तक देखी जा सकती है।

पुनः

$S_{N_1, \ldots\ldots, N_s}^{M_1, \ldots\ldots, M_s}\left[y_1, \ldots\ldots, y_s\right]$ से श्रीवास्तव [12, p. 185, eqn. (7)] द्वारा अध्ययन किये गये बहुचरीय पहुपदों का बोध होता है जिन्हें इस प्रपत्र में किंचित संशोधित रूप

$$S_{N_i, \ldots\ldots, N_s}^{M_i, \ldots\ldots, M_s} [y_1, \ldots\ldots, y_s] = \sum_{K_1=0}^{[N_i/M_i]} \ldots\ldots \sum_{K_s=0}^{[N_s/M_s]}$$

$$\frac{(-N_i)_{M_i K_1}}{K_1 !} \ldots\ldots \frac{(-N_s)_{M_s K_s}}{K_s !} A\,[N_i, K_i; \ldots\ldots ; N_s K_s\, y_i^{K_1} \ldots\ldots y_i^{K_s} \tag{1.2}$$

में प्रस्तुत किया जावेगा जहाँ

$$N_i = 0, 1 \ldots\ldots, S. \qquad M_i \neq 0, [i = 1, \ldots\ldots, S],$$

गुणांक $A\ [N_i, K_i, \ldots ; N_s . K_s]$ यादृच्छिक अचर हैं जो असली या संमिश्र हैं तथा M_i एक यादृच्छिक धन पूर्णांक है।

यदि हम (1.2) में $S = 1$ रखें तथा इस तरह से प्राप्त $A[N, k]$ को $A_{N,k}$ द्वारा अंकित करें तों हमें पहले से श्रीवास्तव द्वारा अध्ययन किया गया बहुज्ञात परिचित आंशिक समाकल आपरेटर को निम्नवत् परिभाषित एवं प्रदर्शित किया जाता है[6] सामान्य श्रेणी $S_N^M(y)$ प्राप्त होती है-

$${}_cR_x^{\mu}\ \{f(x)\} = 1/\Gamma_{\mu} \int_C^x (x-t)^{(\mu-1)} f(t)\, dt, \quad \mathrm{Re}(\mu) > 0 \tag{1.3}$$

आशंकि समाकलन आपरेटर (1.3) चिरसम्मत रीमान-लिओविले आंशिक समाकलन को परिभाषित करता है जो μ कोटि का है जब $c = 0$ एवं $c \to \infty$, इसे μ कोटि के वेइल आंशिक समाकल आपरेटर के रूप में पहचाना जा सकता है।

इस प्रपत्र में हम आंशिक समाकल आपरेटर (1.3) के अन्य सार्वीकरण का अध्ययन करेंगे जिसे निम्नवत् प्रदर्शित करके परिभाषित किया गया है।

$$ {}_cR^{\rho;\,\alpha,\,\beta,\,\tau;\,A,\,B,\,\mu}_{x;\,r,\,s,\,q;\,m,\,k,\,l}\ \{f(x)\} = 1/\Gamma_\mu \int_c^x (x-t)^{\mu-1}\ S_n^{\alpha,\,\beta,\,\tau} \left[z\,\{1-(t/x)\}^\rho : r, s, q, A, B, m, k, l \right] f(t)\, dt \tag{1.4} $$

जहाँ $\mathrm{Re}\,(m) > 0$ तथा $S_n^{\alpha,\beta,\tau}$ [z] से सार्वीकृत बहुपद सेट का बोध होता है जिसे निम्नांकित रोड्रिग प्रकार के सूत्र [7. p. 64, eqn(2.1.8)] द्वारा परिभाषित किया जाता है।

$$ S_n^{\alpha,\,\beta,\,\tau}\,[x; r, s, q, A, B, m, k, l] = (Ax+B)^{-\alpha} \cdot (1-\tau x^r)^{-\beta/\tau} \cdot T_{k,l}^{m+n} \left[(Ax+B)^{\alpha+qn}\ (1-\tau x^r)^{(-\beta/\tau)+Sn} \right] \tag{1.5} $$

अवकल आपरेटर T_{kl} को निम्नवत् परिभाषित करने के साथ

$$ T_{k,l} = x^l \left(k + x \cdot \frac{d}{dx} \right) \tag{1.6} $$

इस सार्वीकृत बहुपद सेट [7. p. 71, eqn (2.3.4)] का प्रकट रूप निम्नवत् होगा-

$$ S_n^{\alpha,\,\beta,\,\tau}\,[x; r, s, q, A, B, m, k, l] = B^{qn}\, x^{l(m+n)}\, (1-\tau x^r)^{sn} \cdot l^{m+n} \cdot \sum_{v=0}^{m+n} \sum_{u=0}^{v} \sum_{j=0}^{m+n} \sum_{i=0}^{j} \frac{(-1)^j (-j)_i (\alpha)_j (-v)_u (-\alpha-qn)_i}{i!\ j!\ u!\ v!\ (1-\alpha-j)_i} \cdot \left(\frac{\beta}{\tau} - sn \right)_v \left(\frac{i+k+ru}{l} \right)_{m+n} \left(\frac{-\tau x^r}{1-\tau x^r} \right)^v (Ax/B)^j \tag{1.7} $$

(1.7) द्वारा परिभाषित बहुपद अत्यन्त सामान्य है और यह कई शोधकर्ताओं[2, 3, 4, 5, 9] द्वारा अध्ययन किये गये अनेक चिरसम्मत बहुपदों को समन्वित करता है। (1.7) की कुछ विशिष्ट दशाएं रायजादा[7] द्वारा दी गई हैं। हम (1.7) की निम्नलिखित कतिपय रोचक दशाओं का उल्लेख कर रहे हैं।

(i) (1.7) में $A = 1, B = 0$ एवं $\tau \rightarrow 0$ रखने पर हमें निम्नांकित द्विपद सेट मिलता है-

$$S_n^{\alpha, \beta, 0}[x; r, s, q, 1, 0, m, k, l] = x^{qn + l(m+n)} \cdot l^{m+n} \sum_{v=0}^{m+n} \sum_{u=0}^{v} \frac{(-v)_u}{u!\, v!} \left(\frac{\alpha + qn + k + ru}{l}\right)_{m+n} \left(\beta x^r\right)^v \qquad (1.8)$$

आपरेटर (1.4) की विशिष्ट दशाएँ

(1.2) में $C = 0$ रखने पर

$$R_{x; r, s, q; m, k, l}^{\rho; \alpha, \beta, \tau; A, B, \mu}\{f(x)\} = 1/\Gamma_\mu \int_0^x (x-t)^{\mu-1} S_n^{\alpha, \beta, \tau}\left[z\{1-(t/x)\}^\rho : r, s, q, A, B, m, k, l\right]((t)\, dt \qquad (1.9)$$

जहाँ Re(m) > 0 | यदि (1.4) में $A = 1$, $B = 0 = q$, $m = -n$ एवं $\tau \rightarrow 0$ रखें तो $S_n^{\alpha, \beta, 0}[x; r, s, 1, 0, -n, k, l] = 1$ और हम आंशिक समाकल आपरेटर (1.3) को प्राप्त करते हैं।

हम द्विपद प्रसारों का उपयोग निम्नांकित प्रकार से करते हैं-

$$\left(ax^\mu + b\right)^\lambda = b^\lambda \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\lambda}{l} \left(ax^\mu/b\right)^l, \qquad (1.10)$$

जहाँ $\left|ax^\mu/b\right| < 1, \left|\arg\left(ax^\mu/b\right)\right| < \pi$

तथा
$$\left(1 - \frac{y}{x^r}\right)^\lambda = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)_t}{t!} \left(y/x^r\right)^t \qquad (1.11)$$

जहाँ, $\left|y/x^r\right| < 1$

2. मुख्य परिणाम

(1)
$$
{}_{c}R^{\rho;\,\alpha,\,\beta,\,\tau;\,A,\,B,\,\mu}_{x.\,r,\,s,\,q;\,m,\,k,\,l}\left\{t^{\lambda}\,(a\,t^{e}+b)^{\xi}\cdot S^{M_1,\dots,M_s}_{N_1,\dots,N_s}\left[y_1\,t^{\eta_l}\,(a\,t^{e}+b)^{n_l},\dots,\,Y_s\,t^{\eta_s}\,(a\,t^{e}+b)^{n_s}\right].\right.
$$

$$
\left.H\left[a_1\,t^{\xi_1}\,(a\,t^{c}+b)^{\sigma_1},\dots,\,a_r\,t^{\xi_Y}\,(a\,t^{c}+b)^{\sigma_r}\right]\right\}
$$

$$
=\frac{1}{\Gamma_{\mu}}\sum_{v=0}^{m+n}\sum_{u=0}^{v}\sum_{j=0}^{m+n}\sum_{i=0}^{j}\phi\,(i,j,u,v)
$$

$$
[z\,x^{-\rho}\,(x-c)^{\rho}]^{l\,(m+n)+r\,v+j}\cdot\sum_{k_1=0}^{[N_1/M_1]}\cdots\cdots\sum_{k_s=0}^{[n_s/M_s]}
$$

$$
\sum_{\omega=0}^{\infty}\sum_{g=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}(-1)^{h}\,\frac{(-N_1)_{M_1k_1}}{k_1\,!}\quad\frac{(-N_s)_{M_sk_s}}{k_s\,!}
$$

$$
\frac{(v-s\,n)_{\omega}.\,\tau^{\omega}\cdot y_1^{k_1}\cdots\cdot y_s^{k_s}}{\omega\,!\;g\,!\;h\,!\;[h+\rho\,\{j+l\,(m+n)+r\,(v+\omega)\}\,+\mu\,]}
$$

$$
\cdot\;A\,[N_1\,k_1\,;\,\cdots;\,N_s\,k_s]\cdot b^{\xi+n_1k_1+\cdots+n_sk_s}
$$

$$
\cdot\,(a/b)^{g}\cdot Z^{r\,\omega}\cdot(x-c)^{h+\mu+\rho r\,\omega}\;.\,X^{\lambda+\eta_1k_1+\cdots+\eta_sk_s+e\,g-h-\rho\,r\,\omega}.
$$

$$
H^{o,\,n'+2;\,m_1'\cdot n_1';\,\cdots;\,m_r',\,n_r'}_{p'+2,\,q'+2;\,p_1',\,q_1',\,\cdots;\,p_r',\,q_r'}
$$

$$
\left[\begin{array}{l|l}a_1\,b^{\rho_1}\,x^{\xi_1} & (-\xi-n_1\,k_1-\dots-n_s\,k_s;\,\sigma_1,\dots,\sigma_r),\,(-\lambda-eg-\eta_1\,k_1-\dots-\eta_s\,k_s;\,\xi_1,\dots,\xi_r)\\ a_r\,b^{\rho}\,r\,x^{\xi}\,r & (g-\xi-n_1\,k_1-\dots-n_s\,k_s;\,\sigma_1,\dots,\sigma_r),\,(-h-\lambda\,eg-\eta_1\,k_1-\dots-\eta_s\,k_s;\,\xi_1,\dots,\xi_r\end{array}\right.
$$

$$
\left.\begin{array}{l}(a_j;\,\alpha_j^{1},\,\dots\dots,\,\alpha_j^{r})_{l},\;p':(c_j',\gamma_j')_{l},\;p_1'\,;\,\dots\dots;(c_j^{r},\gamma_j^{r})_{l,\,p_r'}\\ (b_j\,;\,\beta_j',\,\dots\dots,\,\beta_j^{r})_{l,q'}\,:\,(d_j',\,\delta_j')_1,\;q_1'\,;\;\dots\dots;\;(d_j^{r},\delta_j^{r})_l,\;q_r'\end{array}\right]
\qquad (2.1)
$$

जहाँ

$$\phi(i,j,u,v) = \frac{B^{qn}\ l^{m+n}\ (-1)^j\ (-j)_i\,(-v)_u\,(\alpha_j)}{i!\ j!\ u!\ v!\ (1-\alpha-j)_i} \cdot (-\alpha-qn)_i$$

$$\times \left(\frac{\beta}{\tau} - sn\right)_v \left(\frac{i+k+ru}{l}\right)_{m+n} \left(\frac{A}{B}\right)^j (-\tau)^v \qquad (2.2)$$

परिणाम (2.1) निम्नलिखित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है-

(i) $|\tau z^r| < l$

(ii) $\mathrm{Re}(\mu) > 0$

(iii) $v;\ M_l, \ldots, M_s$ यादृच्छिक धनात्मक पूर्णांक है तथा गुणांक $A[N_1 k_1; \ldots N_s k_s]$ एवं $(N_1, \ldots, N_s; k_1, \ldots, k_s \geq 0)$ यादृच्छिक असली या संमिश्र अचर हैं।

(iv) $\eta_i, n_i \geq 0;\ \xi_i,\ \sigma_i\ (i = 1, 2, \ldots r)$ अनृण पूर्ण संख्याएँ हैं।

(v) $\Delta_i > 0,\ |\arg a_i| < 1/2\ \Delta_i\ \pi, \forall i \in \{1, 2, \ldots r\},$

जहाँ

$$\Delta_i = -\sum_{j=n'+l}^{p'} \alpha_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{n_i'} \gamma_j^{(i)} - \sum_{j=n_i'+1}^{p_i'} \gamma_j^{(i)} - \sum_{j=1}^{q_i'} \beta_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{m_i'} \delta_j^{(i)} - \sum_{j=m_i'+i}^{q_i'} \delta_j^{(i)}$$

(vi) $\mathrm{Re}(\lambda) + \sum_{i=l}^{r} \xi_i\ \alpha_i > -1$

जहाँ

$$\alpha_i = \min_{1 \leq j \leq m_i'} \{\mathrm{Re}(d_j^{(i)} / \delta_j^{(i)}),\ i = 1, 2, \ldots, r$$

(vii) (2.1) के दक्षिण पक्ष में आई श्रेणियाँ पूर्णतया अभिसारी हैं।

उपपत्ति : (2.1) के वामपक्ष में परिभाषा (1.4) का उपयोग करने पर

$$1/\Gamma\mu \int_c^x (x-t)^{\mu-1} \; S_n^{\alpha,\beta,\tau} \left[\{z\{1-(t/x)\}^{\rho}; r, s, q, A, B, m, k, l\right]$$

$$\cdot t^{\lambda}(at^e+b)^{\xi} \cdot S_{N_1,\ldots,N_s}^{M_1,\ldots,M_s}\left[y_1 t_1^{\eta}(at^e+b)^{n_1}, \cdots, y_s t_s^{\eta}(at^e+b)^{n_s}\right]$$

$$\cdot H\left[a_1 t^{\xi}(at^e+b)^{\sigma_1}), \ldots, a_r t^{\xi_\gamma}(at^e+b)^{\sigma_\gamma}\right] dt \qquad (2.3)$$

(2.3) में प्रसार (1.7) एवं (1.2) का उपयोग क्रमशः αβτ एवं $S_{N_1,\ldots,N_s}^{M_1,\ldots,M_s}$ बहुपदों के लिए करने तथा बहुचरीय H-फ्लन को (1.1) द्वारा दिये गये मेलिन-बार्नीज कंटूर से प्रतिस्थापित करने, समाकलन तथा संकलन के क्रम को बदलने पर एवं (1.10) एवं (1.11) द्वारा दिये गये द्विपद प्रसारों का प्रयोग करने पर हमें मिलता है-

(2.1) का वाम पक्ष -

$$= 1/\Gamma_{\mu} \sum_{v=0}^{m+n} \sum_{u=0}^{v} \sum_{j=0}^{m+n} \sum_{i=0}^{j} \sum_{\omega=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{\infty}$$

$$\phi(i,j,u,v) \cdot z^{l(m+n)+r+v+j+r\omega} \cdot x^{-\rho l(m+n)-\rho j-rpv-\sigma r\omega}$$

$$\sum_{k_1=0}^{[N_1/M_1]} \cdots\cdots \sum_{k_s=0}^{[N_s/M_s]} \cdots\cdots \frac{(-N_1)_{M_1k_1}}{k_1!} \; \frac{(-N_s)_{M_sk_s}}{k_s!} \; \frac{(v-sn)_{\omega}}{\omega!\,g!}$$

$$A[N_1k_1;\cdots\cdots;N_sk_s] \cdot y_1^{k_1} \cdots\cdots y_s^{k_s}$$

$$b^{\xi+\pi_1k_1+n_sk_s} \, b^{\sigma_1\xi_1+\ldots+\sigma_1\xi_1+\ldots+\sigma_1\xi_1\tau^{\omega}} \cdot (a/b)^g \frac{1}{(2\pi i)^r}$$

$$\int_{L_1}\cdots\int_{L_r} \phi_1(\xi_1) \ldots \phi_{\rho}(\xi_r)\, \psi(\xi_1, \ldots, \xi_r)\, a_1^{\xi_1}, \ldots a_r^{\xi_r}$$

$$\Gamma(1+\xi+n_1k_1+\ldots+n_sk_s+\sigma_1\xi_1+\ldots+\sigma_r\xi_r)$$

$$/\Gamma-(\xi-g+1+n_1k_1+\ldots+n_sk_s+\sigma_1\xi_1+\ldots+\sigma_r\xi_r)$$

$$\left\{\int_C^x t^{\lambda+eg+\zeta_1\xi_1+\ldots+\zeta_\gamma\xi_\gamma+\eta_1k_1+\ldots+\eta_sk_s} \cdot (x-t)^{\mu-1+\rho t(m+n)+r\rho v+\rho j+\rho rw} dt\right\} \qquad (2.4)$$

जहाँ $\phi(i, j, u, v)$ को (2.2) द्वारा परिभाषित करते हैं।

अब ज्ञात समाकल[8] का उपयोग करने पर

$$\int_C^X (x-t)^{\mu-1} \, . \, t^{\lambda} \, dt = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h \, \Gamma(\lambda+1) \, (x-c)^{h+\mu} \, . \, x^{\lambda-h}}{\Gamma\,(\lambda-h+1)\,(h+\mu)\,.\,h\,!}$$

जहाँ **(2.4)** में $\text{Re}\,(\mu) > 0$ तथा समाकलन एवं संकलन के क्रम को बदलने पर हमें (2.1) का दक्षिण पक्ष प्राप्त होता है।

3. विशिष्ट दशाएँ

हमारा मुख्य परिणाम आंशिक समाकल आपरेटर के विविध ज्ञात तथा नवीन परिणामों का समन्वय एवं विस्तार प्रदान करता है। उदाहरणार्थ हम (2.1) की निम्नलिखित विशिष्ट दशाओं का उल्लेख कर रहे हैं।

(i) यदि $s = 1$, $\xi = 0$, $n_1 = 0$, $a = 1$, $b = 1$, $e = 0$ लें तथा (2.1) में बहुचरीय H-फलन को फाक्स के H-फलन में समानीत करें तो हमें अग्रवाल, पारीक तथा सैगो का परिणाम[1] मिलता है।

(ii) यदि (2.1) में $s = 1$, $n_1 = 0$ रखें तो निम्नांकित परिणाम मिलता है-

$${}_cR_{x;\,r,\,s,\,q;\,m,\,k,\,l}^{\rho;\,\alpha,\,\beta,\,\tau;\,A,\,B,\,\mu} \left\{ t^{\lambda} \, (a\,t^{\tau} + b)^{\xi} \, . \right.$$

$$\left. S_N^M \left[y\,t^{\eta} \right] . \, H\left[a_1 \, t^{\xi_1} \, (a\,t^{e} + b)^{\sigma_1}, \, \ldots.., \, a_r \, t^{\xi}\gamma \, (a\,t^{c} + b)^{\sigma_\gamma} \right] \right\}$$

$$= 1/\Gamma_{\mu} \sum_{v=0}^{m+n} \sum_{u=0}^{v} \sum_{j=0}^{m+n} \sum_{i=0}^{j} \phi\,(i, j, u, v) \left[z\,x^{-\rho} \, (x-c)^{\rho} \right]^{\rho\,(m+n)+r\,v+j}$$

$$\sum_{k=0}^{[N/M]} \sum_{\omega=0,\,g=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{(-N)_{Mk}}{k\,!} \frac{(v-s\,n)_{\omega} \, . \, t^{\omega} \, . \, y^k}{\omega\,!\;h\,!\;h\,!\;[h+\rho\,\{j+l\,(m+n)+r(v+\omega)\}\,+\,\mu]}$$

$$. \, A\,[N, k] \, . \, b^{\xi} \, . \, (a/b)^g \, . \, z^{r\,\omega} \, (x-c)^{h+\mu+\rho\,r\,\omega} \, . \, x^{\lambda+\eta\,k+eg-h-\rho\,r\,\omega}$$

$$H^{o,n'+2;m'_1,n'_1;\ldots;m'_r,n'_r}_{p'+2,q'+2;p'_1,q'_1;\ldots;p'_r,q'_r}$$

$$\left[\begin{array}{c|l} a_1 b^{\sigma}\tau x^{\zeta_1} & (-\xi;\sigma_1;\ldots,\sigma_r),(-\lambda-eg-\eta k;\zeta_1,\ldots,\zeta_r), \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & (g-\xi;\sigma_1,\ldots,\sigma_r),(h-\lambda-eg-\eta k;\zeta_1,\ldots,\zeta_r), \\ \cdot & \\ a_r b^{\sigma}\tau x^{\zeta}\gamma & \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} (a_j;\alpha'_i,\ldots,\alpha^r_j)_{l,p'}:(c'_j,\gamma'_j)_{l,p'_1};\ldots;(c^r_j,\gamma^r_j)_{l,p'_1} \\ (b_j;\beta'_j,\ldots,\beta^r_j)_{l,q'}:(d'_j,\delta'_j)_{l,q'_1};\ldots;(d^r_j,\delta^r_j)_{l,q'_r} \end{array}\right] \quad (3.1)$$

जहाँ M_1, N_1, η_1 एवं k_1 के स्थान पर क्रमशः M, N, y, h, k रखा गया है।

(iii) यदि (3.1) में $N = 0$, $M = 1$, $k = 0$ तथा $A_{[0,o]} = 1$ रखें तो $S^M_N\,[y\,t^n]$ इकाई में समानीत हो जाता है और हमें निम्नांकित परिणाम प्राप्त होता है-

$${}_cR^{\rho;\alpha,\beta,\tau;A,B,\mu}_{x;r,s,q;m,k,l}\left\{t^{\lambda}(at^e+b)^{\xi}.H\left[a_1 t^{\xi_1}(at^e+b)^{\sigma_1},\ldots,a_r t^{\zeta}\gamma(at^e+b)\sigma\gamma\right]\right\}$$

$$= 1/\Gamma\mu \sum_{v=0}^{m+n}\sum_{u=0}^{v}\sum_{j=0}^{m+n}\sum_{i=0}^{j} \phi(i,j,u,v)\left[zx^{-\rho}(x-c)^{\rho}\right]^{l(m+n)+rv+j}\sum_{\omega,g,h=0}^{\infty}(-1)^h$$

$$\frac{(v-sn)_{\omega}\;.\;t^{\omega}}{\omega!\;g!\;h!\;[h+\rho\{j+l(m+n)+r(v+\omega)\}+\mu]}\;.\;b^{\xi}\;.\;(a/b)^g\;.\;z^{r\omega}$$

$$(x-c)^{h+\mu+\rho r\omega}\;.\;x^{\lambda+eg-h=\rho r\omega}$$

$$H^{o,n'+2;m'_1.n'_1.n'_1;\ldots;m'_r,n'_r}_{p'+2,q'+2;p'_1,q'_1;\ldots;p'r,q'r}$$

$$\left[\begin{array}{c|l} a_1\, b_1 \sigma\, x_1^{\zeta} & (-\xi_s\,;\, \sigma_1\,, \ldots, \sigma_r)\,,\, (-\lambda - eg\,;\, \zeta_1\,, \ldots, \zeta_r)\,, \\ a_r\, b_r^{\sigma}\, x^{\zeta}\, r & (g-\xi\,, \ldots, \sigma_r)\,,\, (h-\lambda-eg\,;\, \zeta_1\,, \ldots, \zeta_r)\,, \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} (a_j\,;\alpha_j'\,, \ldots, \alpha_j^r)_l\,,\, p' : (c_j'\,,\, \gamma_j')_l\,,\, p_1' \cdot \gamma_j')_l\,,\, p_r' \\ (b_j\,;\, \beta_j'\,, \ldots, \beta_j^r)_l\,, q' : (d_j^r\,, \delta_j')_l\,,\, q_1'\,; \ldots ;\, (d_j^r\,,\, \delta_j^r)_l\,,\, q_r' \end{array}\right]$$

(iv) $S_N^M\left[y\, t^n\right]$ को परिणाम

$$A_{[N,\,j]} = \frac{(\alpha'+1)_N\ (\alpha' + \beta' + N + 1)_j}{(\alpha'+1)_j} \qquad \text{(जैकोबी बहुपद के लिए)}$$

और

$$A_{[N,\,j]} = \frac{\Gamma\,(1+\alpha'+l'\ N)}{N!\ \Gamma\,(1+\alpha'+l'\ j)} \qquad \text{(कानहाउजर द्वि-लाम्बिक बहुपदों के लिए)}$$

की सहायता से जैकोबी बहुपद तथा कानहाउजर द्वि-लाम्बिक बहुपद में परिवर्तित करने पर हमें मुख्य परिणाम से जैकोबी बहुपद तथा कानहाउजर द्विलाम्बिक बहुपदों वाले रोचक परिणाम प्राप्त होते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय एम. आर. इंजीनियरी कालेज जयपुर के डॉ० के० सी० गुप्ता तथा राजस्थान विश्वविद्यालय जयपुर के डॉ० एस० पी० गोयल को उनके द्वारा दिये गये सुझावों के लिए धन्यवाद ज्ञापित करते हैं।

निर्देश

1. अग्रवाल, रजनी, पारीक, आर. एस. तथा सैगो, मेगुमी : Journal of Fractional Calculus, Vol. 7, May (1995) 55-60, Descortes Press.

2. चटर्जी, एस. के. : C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A-B, 1969, 268, A600-A602.

3. ढिल्लों, एस. एस. : पी-एच डी. थीसिस, बुन्देलखण्ड, विश्वविद्यालय, 1989.

4. गूल्ड, एच. डब्ल्यू. तथा हापर, ए. टी. : Duke Math J., 1962, 29, 51-63.

5. क्राल, एच. एल. तथा फ्रिंक, ओ. : Trans Amer. Math Soc, 1949, 65, 100-115.

6. ओल्डम, के. बी. तथा स्पैनियर, जे. : The Fractional Calculus, Academic Press, New York, London, 1974.

7. रायजादा, एस. के. : पीएच. डी. थीसिस, बुन्देलखण्ड, विश्वविद्यालय, 1991.

8. रास, बी. : A brief history and expansion of the fundamental theory of fractional calculus. Fractional calculus and its applications (B. Ross Ed), Springer. Berlin-Heidelberg-New York, 1975.

9. सिंह, आर. पी. तथा श्रीवास्तव के. एन. : Ricerca (Napoli) 1963, (2), 14 11-21, Errata, ibid. 1964, 15, 64.

10. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा पंडा, आर. : J. Reine Angew, Math, 1976, 283/284, 265-274.

12. श्रीवास्तव, एच. एम. Pacific J. Maths, 1985, 117, No. 1.

13. वही : Indian J. Math., 1972, 14, 1-6

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 44, No. 2, April 2001.

फिन्सलर समष्टि में वक्रों का अत्यणु विरूपण

सी. के. मिश्रा
गणित तथा सांख्यिकी विभाग, अवध विश्वविद्यालय, फैजाबाद
तथा
आर. बी. मिश्रा
गणित विभाग, ए. वी. विश्वविद्यालय, रीवाँ (म. प्र.)

[प्राप्त-जुलाई 20, 2000]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में फिन्सलर समष्टि में वक्रों के अत्यणु विरूपण पर विचार किया गया है।

Abstract

Infinitesimal deformation of curves in a Finsler space. *By* C. K. Mishra, Department of Mathematics and Statistics, Avadh University, Faizabad (U.P.) and R. B. Misra, Department of Mathematics, A. P. Singh University, Rewa (M. P.)

Various entities of infinitesimally deformed Finsler space have been found out in the previous paper (Misra and Misra).[2] In the present paper the infinitesimal deformation of curves is considered. The conditions for parallel tangent deformation have been also derived.

1. प्रस्तावना

माना कि F_n n-आयामी फिन्सलर समष्टि है जो संमित दूरीक प्रदिश (metric tensor)

$$g_{ij}(x, \dot{x}) \overset{def}{=\!=} 1/2\, \dot{\partial}_i \dot{\partial}_j F^2(x, \dot{x}) \qquad (1.1a)$$

जहाँ से लैस है जहाँ

$$\dot{\partial}_i = \partial/\partial \dot{x}^i \qquad (1.2a)$$

चूँकि दूरीक फलन $F(x, \dot{x})$ दो $\dot{x}^i$ में कोटि एक का धनात्मक समांग मान लिया जाता है, इसलिए दूरीक प्रदिश $\dot{x}^i$ में कोटि शून्य का समांग फलन है। दूरीक प्रदिश के प्रतिपरवर्ती घटकों को निम्नवत् दिया जाता है-

$$g^{ij} \; g_{jh} = \delta^i_h = \begin{cases} 1 \text{ यदि } & h = i \\ 0 \text{ यदि } & h \neq i \end{cases} \tag{1.1b}$$

जब आधार तत्व (Element of Support} का समान्तर विस्थापन होता है तो कार्टन के अर्थ में सदिश $x^i(x, \dot{x})$ में विचरण को रुण्ड द्वारा[3] प्रदर्शित किया जाता है।

$$DX^i = d\,x^i + X^j\,\Gamma^{*i}_{jk}\,d\,x^k \tag{1.3}$$

जहाँ $\Gamma^{*i}_{jk}\,(x, \dot{x})$ कार्टन के संबंधन गुणांक हैं और अपने निचले सूचकांकों में संमित है।

जब फिन्सलर समष्टि F_n अत्यणु परिवर्तन

$$\overline{X}^i = x^i + v^i\,(x, \dot{x})\,d\tau \tag{1.4}$$

के अन्तर्गत F_n में विरूपित होता है तो विरूपित समष्टि F_n के तत्समकों को मिश्रा तथा मिश्रा[2] के अनुसार दिया जाता है।

$$\overline{X}^i\,(x, \dot{x}) = X^i\,(x, x) + \Big\{ v^j\,\partial_j X^i - X^j\,\partial_j\,v^i + (\dot{\partial}_j\,X^i)\,(\dot{x}^k\,\partial_k + \ddot{x}^k\,\dot{\partial}_k v^j) \Big\}\,d\tau \tag{1.5}$$

तथा

$$\overline{g}_{ij}\,(x, \dot{x}) = g_{ij}\,(x, \dot{x}) + \Big\{ v^k\,\partial_k\,g_{ij} + g_{kj}\,\partial_i\,v^k + g_{ik}\,\partial_j\,v^k + (\dot{\partial}_k\,g_{jj})\,(\dot{x}^h\,\partial_h\,v^k + \ddot{x}^h\,\dot{\partial}\,v^k) \Big\}\,d\tau \tag{1.6}$$

जहाँ

$$\partial_k = \partial/\partial\,x^k. \tag{1.2b}$$

2. वक्रों का विरूपण

माना कि x^i एवं $(x^i + dx^i)$ केन्द्र हैं F_n में दो क्रमागत रेखा अल्पांशों के तो उनके बीच की दूरी (2.1) द्वारा व्यक्त की जाती है-

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j \tag{2.1}$$

यदि $\bar{x}^i$ एवं $(\bar{x}^i + d\bar{x}^i)$ विरूपित समष्टि F_n में संगत केन्द्र हों तो उनके बीच की दूरी को तदनुसार (2.2) द्वारा दिया जाता है-

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{ij}\, d\bar{x}^i\, d\bar{x}^j \tag{2.2}$$

हमें निम्नांकित प्रमेय प्राप्त हैं।

प्रमेय (2.1) : $d\bar{s}/ds$ एवं ds/ds के मान

$$d\bar{s}/ds = 1 + (\phi/ds)\, d\tau \tag{2.3a}$$

तथा

$$ds/d\bar{s} = 1 - (\phi/ds)\, d\tau \tag{2.3b}$$

द्वारा दिये जाते हैं जहाँ अदिश फलन $\phi(x, \dot{x})$ को निम्नवत् परिभाषित किया जाता है–

$$\phi(x, \dot{x}) \stackrel{def}{=\!=} (\partial_k\, ds)\, v^k + (\dot{\partial}_k\, ds) \left\{\dot{x}^h\, \partial_h\, v^k.\ \ddot{x}^h\, \dot{\partial}_h\, v^k\right\}, \tag{2.4}$$

तथा वे पद जिनमें d_Z के घात इकाई से अधिक हैं उन्हें छोड़ दिया गया है।

उपपत्ति : (2.2) में $\bar{g}_{ij}$, $d\bar{x}^i$ एवं $d\bar{x}^j$ के मान रखतने तथा (2.1) का प्रमेय करने पर d_z के एक से उच्चतर घातों वाले पदों की उपेक्षा करने पर हमें

$$d\bar{x}^2 = ds^2 + 2\,ds \left\{v^k\, \partial_k\, ds + (\dot{\partial}_k\, ds) \left(\dot{x}^h\, \partial_h\, v^k + \ddot{x}^h\, \dot{\partial}_h\, v^k\right)\right\} d\tau, \tag{2.5a}$$

प्राप्त होता है जो (2.4) के फलस्वरूप (2.5 b) में समानीत हो जाता है-

$$d\bar{s}^2 = ds^2 + 2\,\phi\, ds\, d\tau. \tag{2.5b}$$

इस समीकरण के दोनों पक्षों में ds^2 से भाग देने तथा वर्गमूल निकालने पर हमें (2.3a) प्राप्त होता है (जब हम d_z के इकाई से उच्चतर घातों वाले पदों की उपेक्षा करते हैं)।

अब (2.3a) से हमें

$$ds/d\bar{s} = \left(1 + \frac{\phi}{ds}\, d\tau\right)^{-1} = 1 - \frac{\phi}{ds} \quad d\tau,$$

मिलता है जिसमें हमने d_z के इकाई से कम उच्चतर घातों के पदों की उपेक्षा की है। इस तरह (2.3b) स्थापित हो जाता है।

प्रमेय 2.2 : F_n के वक्र C को वक्र C में विरूपित होने के लिए जब समष्टि F_n (1.4) में अत्यणु परिवर्तन से उत्पन्न गतियों के एक-प्राचल समूह को अनुमति देता है, आवश्यक तथा पर्याप्त प्रतिबन्ध निम्नवत् है-

$$2\, \frac{dv^i}{ds} = v^k\, \partial_k\, \xi^i + \xi^i\, \frac{\phi}{ds} + \left(\dot{\partial}_k \quad \xi^i\right)$$

$$\left(\dot{x}^h\, \partial_h\, v^k + \ddot{x}^h\, \dot{\partial}_h\, v^k\right), \tag{2.6}$$

जहाँ $\xi^i \quad (x, \dot{x})$ वक्र C पर इकाई स्पर्श रेखाएँ हैं।

उपपत्ति : माना कि $C : x^i = x^i\,(s)$ F_n में वक्र है जिसमें $\xi^i \quad (x, \dot{x})$ उसकी इकाई स्पर्श रेखाएँ हैं, अर्थात्

$$\xi^i\,(x, \dot{x}) = \frac{\partial x^i}{ds} \overset{def}{=\!=\!=} x'^{\,i} \tag{2.7}$$

जब समष्टि F_n अत्यणु परिवर्तन (1.4) के अन्तर्गत समष्टि F_n में विरूपित होती है तो वक्र C एक वक्र C में विरूपित हो जावेगा जिसकी इकाई स्पर्श रेखाएँ $\xi^i \quad (x, \dot{x})$ ऐसी होंगी कि

$$\bar{\xi}^i\,(x, \dot{x}) = \frac{d\bar{x}^i}{ds} = \frac{d\bar{x}^i}{ds}\,\frac{ds}{d\bar{s}}$$

(1.4) एवं (2.3b) का प्रयोग करने पर उपर्युक्त समीकरण (2.8) में समानीत हो जाता है।

$$\bar{\xi}^i\,(x, \dot{x}) = \xi^i\,(x, \dot{x}) + (dv^i/ds - \xi^i\, \phi/ds)\, d\tau \tag{2.8}$$

जहाँ d_j के इकाई से उच्चतर घात पदों की उपेक्षा की गई है।

अपरंच, विरूपित सदिश $\bar{\xi}^i$ को (1.5) से प्राप्त किया जा सकता है। इस तरह निम्नांकित तत्समक के परिप्रेक्ष्य में (1.5) तथा 2.8) से समीकरण (2.6) निकल आता है।

$$\left(\partial_k\, v^i\right) \xi^k = \left(\partial_k\, v^i\right) dx^k/ds = dv^i/ds.$$

उपप्रमेय : यदि विरूपण को वक्र C पर स्पर्श रेखा की दिशा में लिया जाय तो विरूपित् वक्र के इकाई स्पर्श रेखा सदिश को (2.9) द्वारा दिया जाता है-

$$\bar{\xi}^{i}(x, \dot{x}) = \xi^{i}(x, \dot{x}) + (\dot{\partial}_{k} \xi^{i}) \left(\dot{x}^{h} \partial_{h} \xi^{k} + \ddot{x}^{h} \dot{\partial}_{h} \xi^{k} \right) d\tau \qquad (2.9)$$

उपपत्ति : (2.6) में $v^{i} = \xi^{i}$ रखने पर तथा तत्समक

$$\left(\dot{\partial}_{k} \xi^{i} \right) \dot{\xi}^{k} = \left(\partial_{k} \xi^{i} \right) dx^{k}/ds = d\xi^{i}/ds,$$

का प्रयोग करने पर (2.10) मिलता है-

$$d\xi^{i}/ds - \xi^{i}\, \phi/ds = \left(\dot{\partial}_{k} \xi^{i} \right) \left(\dot{\partial}_{k} \partial_{h} \xi^{k} + \ddot{x}^{h} \dot{\partial}_{h} \xi^{k} \right). \qquad (2.10)$$

समीकरण (2.9) को (2.8) तथा (2.10) से प्राप्त किया जाता है। इसे (1.5) में x^{i} तथा v^{i} वेक्टरों के स्थान पर ξ^{i} रख कर भी व्युत्पन्न किया जा सकता है।

प्रमेय 2.3 : वक्र पर स्पर्शरेखा के लिए समान्तर रूप से विस्थापित होने के लिए आवश्यक तथा पर्याप्त प्रतिबन्ध निम्नवत् होगा जब समष्टि F अत्यणु रूपान्तर (1.4) द्वारा समष्टि F में विरूपित हो जाती है-

$$Dv^{i}/Ds = \xi^{i}\, \phi/ds \qquad (2.11)$$

जहाँ ξ^{i} वक्र पर इकाई स्पर्श रेखाएँ हैं।

उपपत्ति : हम हम अपने आधार तत्व (Element of Support) को वक्र C पर इकाई स्पर्श रेखा सदिश द्वारा परिभाषित करेंगे। तब (1.3) से यह निकलता है कि $\bar{p}$ बिन्दु पर इकाई रेखा सदिश P बिन्दु पर सदिश ξ^{i} को निम्नवत् लिखा जा सकता है–

$$\bar{\bar{\xi}}^{i} = \xi^{i} - \xi^{j}\, \Gamma^{*i}_{jk}\, dx^{k}. \qquad (2.12)$$

(1.4) से हम पाते हैं-

$$dx^{k} = \bar{x}^{k} - x^{k} = v^{k}\, d\tau. \qquad (2.13)$$

अतः (2.12) समानीत होता है (2.14) में

$$\bar{\bar{\xi}} = \xi^{i} - \xi^{i}\, \Gamma^{*i}_{jk}\, v^{k}\, d\tau. \qquad (2.14)$$

नवीन $(\xi^i - \bar{\bar{\xi}}^i)$ एक अत्यणु सदिश है जिसे हम $\delta\, \xi^i$ से दर्शाएँगे। जिस प्रतिबन्ध से विरूपण (1.4) के दौरान वक्र पर स्पर्श रेखा के समान्तर रूप से विस्थापित किया जा सकता है वह है-

$$\lim_{\delta s \to o} \delta \xi^i / \delta s = 0, \tag{2.15}$$

जहाँ

$$ds = \sqrt{\left\{ g_{ij} (\bar{x}^i - x^i)\ (\bar{x}^j - x^j) \right\}} = v\, dj \tag{2.16}$$

$v(x, x')$ के सदिश हैं जिनके प्रति परवर्ती घटक $v^i(x, x')$. हैं। (2.8) से (2.15) को घटने पर

$$\delta \xi^i = \left\{ dv^i/ds - \xi^i\, \phi/ds + \xi^j\, \Gamma^{*\,i}_{jk}\, v^k \right\}\ d\tau \tag{2.17}$$

समीकरण (2.11) को (1.3), (2.15) तथा (2.17) से प्राप्त किया जाता है।

3. समान्तर स्पर्श रेखा विरूपण की दशा के वैकल्पिक रूप

माना कि $\xi^i 1/$, $\xi^i 2/$ एवं $\xi^i_{\alpha/}$ $(\alpha = 3, 4, \ldots, n)$ किसी बिन्दु पर वक्र C पर स्पर्श रेखा, मुख्य अभिलंब तथा (n – 2) द्विलंब है। $v^i(x, x')$ को इनके पदों में व्यक्त करने पर

$$v^i(x, x') = \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\alpha/}\, \xi^i_{\alpha/} \tag{3.1}$$

जहाँ $c_{\alpha/}(x, x')$ अदिश हैं। आधार तत्व को पुनः वक्र C पर इकाई स्पर्श रेखा अदिश x'^i के रूप में चुना गया है।

हमें निम्नांकित प्रमेय प्राप्त हैं-

प्रमेय 3.1 : किसी वक्र पर स्पर्श रेखा सदिश को समान्तरतः विस्थापित किया जा सकता है जब समष्टि F_n को समष्टि F_n में अत्यणु विरूपण **(1.4),** द्वारा विरूपित किया गया हो तो ऐसी दशा में विकल्प रूपों को निम्नवत् दिया जाता है

$$\frac{dc_1/}{ds} + \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\alpha/}\, \nu_{\alpha 11} = \frac{\phi}{ds}, \tag{3.2a}$$

$$\frac{dC_{\beta/}}{ds} + \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\alpha 1}\, \nu_{\alpha\beta 1} = 0, \ (\beta = 2, 3 \ldots.. n)$$

तथा

$$\sum_{\alpha=2}^{n} \left(\frac{dc_{\alpha/}}{ds} + \frac{dc_{\alpha-1/}}{\rho_{\alpha-2}} - \frac{C_{\alpha+2/}}{\rho_{\alpha}} \right) \xi^i_{\alpha/} = 0, \tag{3.2b}$$

जहाँ ν_{abc} रिची के घूर्णन गुणांक हैं और

$\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}, \dots\dots, \frac{1}{\rho_{n-1}}$ क्रमशः प्रथम, द्वितीय, (n – 1) वीं वक्रताएं हैं।

उपपत्ति : (3.1) के फलस्वरूप प्रतिबन्ध (2.11) निम्नांकित रूप धारण करता है–

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{dc_{\alpha/}}{ds} \xi^{i}_{\alpha/} + C_{\alpha/} \frac{D\xi^{i}_{\alpha/}}{Ds} \right) = \frac{\phi}{ds} \xi^{i}_{1/} \tag{3.3}$$

इस समीकरण में $\xi_{\beta/i}$ $(\beta = 1, 2, \dots, n)$ से गुणा करने तथा i तक संकलन करने पर

$$dc_{\beta/}/ds + \sum_{\alpha=1}^{n} C_{\alpha/} \nu_{\alpha\beta 1} = \left(\frac{\phi}{ds} \right) \delta^{\beta}_{1},$$

जो $\beta = 1$ तथा $\beta = 2, 3, \dots, n$ के लिए (3.2a) द्वारा दिये जाने वाले रूप ग्रहण करते हैं।

अपरंच फर्नेट सूत्र[3]

$$\frac{D\xi^{i}_{\alpha/}}{Ds} = \frac{1}{\rho_\alpha} \xi^{i}_{\alpha+1/} - \frac{1}{\rho_{\alpha-1}} \xi^{i}_{\alpha-1/} \tag{3.4}$$

$$\left(\alpha = 1, 2, \dots, n; \frac{1}{\rho_o} = \frac{1}{\rho_n} = 0 \right),$$

का उपयोग (3.3) में करने पर

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ \left(\frac{dC_{\alpha/}}{ds} \right) \xi^{i}_{\alpha/} + \left(\frac{C_{\alpha/}}{\rho_\alpha} \right) \xi^{i}_{\alpha+1/} - \left(\frac{C_{\alpha/}}{\rho_{\alpha-1}} \right) \xi^{i}_{\alpha-1/} \right\} = \left(\frac{\phi}{ds} \right) \xi^{i}_{1},$$

अथवा

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{dC_{\alpha/}}{ds} + \frac{C_{\alpha-1/}}{\rho_{\alpha-1}} - \frac{C_{\alpha+1}}{\rho_\alpha} \right) \xi^{i}_{\alpha/} = \frac{\phi}{ds} \xi^{i}_{1/} \tag{3.5}$$

इस समीकरण में $\xi_{1/i}$ से गुणा करने तथा सूचक i तक संकलन करने पर

$$dc_1/ds - c_2/\rho_1 = \phi/ds \tag{3.6}$$

(3.5) एवं (3.6) से हमें (3.2b) प्राप्त होता है।

उपप्रमेय : यदि c_1 अचर हो तथा वक्र C एक अल्पान्तरी (geodesic) हो तो प्रथम विचरण को (3.7) द्वारा दिया जाता है।

$$\phi = 0. \tag{3.7}$$

उपपत्ति : अल्पान्तरी के लिए हमें ज्ञात है

$$\gamma_{\alpha i i} = 0. \tag{3.8}$$

इस तरह जब $C_{1/}$ अचर होता है तो (3.2a) तथा (3.8) से हमें तुरन्त ही (3.7) प्राप्त होता है।

प्रमेय 3.2 : $d\bar{s}/ds$ एवं $ds/d\bar{s}$ व्युत्पन्नों के वैकल्पिक रूपों को निम्नवत् लिखा जाता है–

$$d\dot{s}/ds = 1 + \left\{\frac{dc_{i/}}{ds} - \frac{C_{2/}}{\rho_i}\right\} d\tau \tag{3.9a}$$

तथा

$$ds/d\dot{s} = 1 - \left\{\frac{dc_{i/}}{ds} - \frac{C_{2/}}{\rho_i}\right\} d\tau \tag{3.9b}$$

उपपत्ति : (3.6) में आये ϕ/ds का मान (2.3a) एवं (2.3b) में रखने पर हमें क्रमशः (3.9a) तथा (3.9b) प्राप्त होते हैं।

निर्देश

1. मिश्रा, आर. बी. तथा मिश्रा, आर. एस.: Rev. de la Fac. Sci. Univ. Istanbul, 1965, Ser. A, 30, 77-82.
2. मिश्रा, सी. के. तथा मिश्रा, आर. बी. (प्रकाशनाधीन)
3. रुण्ड, एच.: The Differential Geometry of Finsler Spaces. Springer-Verlag (1959).
4. सिंह, के. डी. तथा मिश्रा, आर. एस.: Riv. Mat. Univ. Parma, 1956, 7, 79-88.
5. सिन्हा, बी. बी. : पी-एच. डी. थीसिस, गोरखपुर विश्वविद्यालय (1962)

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 44, No. 2, April 2001.

सांख्यिकीय साम्यावस्था में संयुक्त प्रायिकता $P(J_1, J_2, ... J_n)$ की स्थापना एवं विभिन्न परिस्थितियों में अध्ययन

एस. एन. सिंह

अध्यक्ष गणित विभाग, डॉ. राम मनोहर लोहिया अवध विश्वविद्यालय, फैजाबाद (उ० प्र०)

तथा

जे. एन. मिश्रा

गणित विभाग, गनपत सहाय स्नातकोत्तर महाविद्यालय, सुलतानपुर (उ० प्र०)

[प्राप्त –अक्टूबर 20, 2000]

सारांश

सांख्यिकीय साम्यावस्था में संयुक्त प्रायिकता $P(J_1, J_2, J_3, ... ,J_n)$ की स्थापना पॉयशन वितरण की सहायता से विविध आवश्यकता वाले ग्राहकों की सम्पूर्ण संख्या पर अनेकानेक दशाओं में की गयी है जहाँ J_i $(i = 1, 2, 3, 4, ... n)$ i प्रकार के ग्राहक को निरूपित करता है और ग्राहक को सेवा प्रदान की जा रही है।

Abstract

Statistical equilibrium joint probability $P(J_1\ J_2\ J_3 ... ... J_n)$ and study in different conditions. *By* S. N. Singh, Mathematics Department, Dr. R. M. L. Avadh University, Faizabad and J. N. Mishra, Mathematics Department, Ganpat Shai P. F. College, Sultanpur (U. P.).

Statistical equilibrium joint propability for J_1 customers of type i $(i = 1, 2, 3, 4, ... n)$ are in service, is obtained with the help of Poisson distribution under different conditions imposed on total number of customers of different requirements.

1. प्रस्तावना

अनेकानेक शोध विशेषज्ञों [2, 4, 5, 6, 7, 8] के एक-दिशीय जन्म एवं मृत्यु की प्रक्रिया के

अध्ययनों से अभिप्रेरित होकर हमने बहुदिशीय जन्म एवं मृत्यु के पंक्ति माण्डलों का सार्वीकृत रूप में अध्ययन करने की संकल्पना की है। पॉयसन वितरण के अनुसार आने वाले समान आवश्यकता के ग्राहकों की सेवा अलग-अलग या तो एक सेवक द्वारा *M/M/I* पंक्ति में या समान्तर क्रम में बैठे *S* सेवकों द्वारा *M/M/S/∞* पंक्ति में की जाती है। एकदिशीय जन्म एवं मृत्यु प्रक्रिया की आवश्यक अभिलाक्षणिक स्थितियाँ $E_0, E_1, E_2 \ldots E_n$ हैं। स्थितियों में परिवर्तन की दर निकाय की तात्कालिक दशा पर निर्भर करती है। स्थिति प्रायिकताएं $\{P_j\}$ परस्पर निम्नांकित समीकरण द्वारा संबंधित हैं।

$$\left(\lambda_i + \mu_j\right) P_j = \lambda_{j-1} P_{j-1} + \mu_{j+1} P_{j+1} \qquad (1.1)$$

$$(j = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots\ldots)$$

जहाँ $\{\lambda_j\}$ एवं $\{\mu_j\}$ ऊपर एवं नीचे जाने की दर है।

समीकरण (1.1) का हल

$$P_j = \begin{cases} R^{-1} & (j = 0) \\ \dfrac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \ldots\ldots \lambda_j}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \ldots\ldots \mu_j} P_o & (j = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots) \end{cases} \qquad (1.2)$$

जहाँ कि

$$R = 1 + \frac{\lambda_o}{\mu_1} + \frac{\lambda_o \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \frac{\lambda_o \lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} + \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots \frac{\lambda_o \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \cdots \mu_j} + \ldots\ldots$$

एवं $R < \infty$

पॉयसन वितरण से प्रायिकता $P\{N(t) = j\} = P_j(t) = \dfrac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}$

$$(j = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots) \qquad (1.3)$$

यदि अनंत संख्या के सेवकों के बारे में विचार करें जो कि दो प्रकार के ग्राहकों (जिनके आने की दर λ_1 एवं λ_2 है) की सेवा हेतु लगाये गये हैं तो दो दिशीय दशाओं $\{E_{j_1, j_2}\}$ के लिए मारकोव के गुण-धर्म लागू होते हैं।

सांख्यिकीय–साम्य की संयुक्त प्रायिकता $P(J_1, J_2)$ निम्नलिखित सांख्यिकीय-साम्य के स्थिति समीकरण को संतुष्ट करती है।

$$\left(\lambda_1+\lambda_2+j_1\mu_1+j_2\mu_2\right)P\left(j_1,j_2\right)=\lambda_1\,P\left(j_1-1,j_2\right)+\lambda_2\,P\left(j_1,j_2-1\right)$$

$$+\left(j_1+1\right)\mu_1\,P\left(j_1+1,j_2\right)+\left(j_2+1\right)\mu_2\,P\left(j_1,j_2+1\right)$$

$$\left[\,P\left(-1,j_2\right)=P\left(j_1,-1\right)=0\,,\,j_1=0,1,2,\ldots\ldots;\,j_2=0,1,3,\ldots\right] \quad (1.4)$$

एवं
$$P\left(j_1,j_2\right)=\frac{\left(\dfrac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{j_1}}{j_1\,!}\;\frac{\left(\dfrac{\lambda_2}{\mu_2}\right)^{j_2}}{j_2\,!}\;e^{-[\lambda_1/\mu_1+\lambda_2/\mu_2]} \quad (1.5)$$

2. स्थापना

अब हम अनंत सेवकों के समूह पर विचार कर रहे हैं जिनके पास सेवार्थ n प्रकार की आवश्यकता से पॉयशन बंटन के तहत् λ_1, λ_2, λ_3, ... λ_n दरों से पहुँच रहे हैं। माना कि

$$P\left(j_1,j_2,j_3,\ldots.j_n\right)$$

द्वारा सांख्यिकीय साम्य की संयुक्त प्रायिकता निरूपित की जा रही है जहाँ j_i ग्राहक i प्रकार के हैं और एकसाथ सेवा पा रहे हैं। $(i=1,2,3,\ldots\ldots)$.

समीकरण (1.4) की सहायता से साम्य समीकरण निम्न प्रकार से लिखे जा सकते हैं।

$$\left(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\ldots..+\lambda_n+j_1\mu_1+j_2\mu_2+j_3\mu_3+\ldots+j_n\mu_n\right)$$

$$P\left(j_1,j_2,j_3,j_4,\ldots\ldots.j_n\right)$$

$$=\lambda_1\,P\left(j_1-1,j_2,j_3,\ldots.j_n\right)+\lambda_2\,P\left(j_1,j_2-1,j_3,\ldots.j_n\right)+\lambda_3\,P\left(j_1,j_2,j_3-1\ldots j_n\right)$$

$$+\ldots\ldots..+\lambda_n\,P\left(j_1,j_2,j_3,\ldots.j_n-1\right)+\left(j_1+1\right)\mu_1\,P\left(j_1+1,j_2,j_3,\ldots.j_n\right)$$

$$+\left(j_2+1\right)\mu_2\,P\left(j_1,j_2+1,j_3,\ldots.j_n\right)+\ldots..+\left(j_n+1\right)\mu_n\,P\left(j_1,j_2,\ldots..j_n+1\right)$$

$$\left[\begin{array}{lll} P\left(-1,j_2,j_3,\ldots j_n\right)=P\left(j_1,-1,j_2,\ldots j_n\right)=\ldots.=P\left(j_1,j_2,j_3,\ldots nj_{n-1}-1\right)=0 & & \\ \text{एवं}\quad j_j=0,1,2,3,\ldots\ldots & \text{जहाँ कि} & i=1,2,3,4,\ldots.n \end{array}\right] \quad (2.1)$$

अध्ययन के अंतर्गत की प्रायिकतायें निम्नलिखित सामान्यीकरण समीकरण को संतुष्ट करती हैं।

$$\sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \sum_{j_3=0}^{\infty} \ldots\ldots \sum_{j_n=0}^{\infty} P\left(j_1, j_2, j_3, j_4, \ldots, j_n\right) = 1 \qquad (2.2)$$

चूँकि सेवकों की संख्या अनंत है अतः n ग्राहक परस्पर कोई व्यवधान नहीं उत्पन्न करते। अतः एकदिशीय समस्या के दृष्टिगत ग्राहकों की संख्या का पार्श्व वितरण या कहिये पॉयसन वितरण–

$$P_1(j_1) = \sum_{k=0}^{\infty} P(j_1, k) = \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{j_1}}{j_1!} e^{-\lambda_1/\mu_1}$$

$$\vdots$$

$$P_2(j_2) = \sum_{k=0}^{\infty} P(j_2, k) = \frac{\left(\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)^{j_2}}{j_2!} e^{-\lambda_2/\mu_2}$$

$$\vdots$$

$$P_n(j_n) = \sum_{k=0}^{\infty} P\left(j_n, k\right) = \frac{\left(\frac{\lambda_n}{\mu_n}\right)^{j_n}}{j_n!} e^{-\lambda_n/\mu_n} \qquad (2.3)$$

निकाय में सम्मिलित n प्रकार के ग्राहक परस्पर स्वतंत्र हैं अतः

$$P\left(j_1, j_2, j_3, j_4, \ldots\ldots\ldots j_n\right) = P_1(j_1)\ P_2(j_2)\ P_3(j_3)\ \ldots\ldots\ P_n(j_n) \qquad (2.4)$$

समीकरणों (2.3) के प्रयोग से समीकरण (2.4) निम्न रूप होगा–

$$P\left(j_1, j_2, j_3, j_4, \ldots\ldots\ldots j_n\right) = \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{j_1}}{j_1!} \frac{\left(\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)^{j_2}}{j_2!} \frac{\left(\frac{\lambda_3}{\mu_3}\right)^{j_3}}{j_3!} \ldots\ldots \frac{\left(\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n-1}}\right)^{j_{n-1}}}{j_{n-1}!}$$

$$\frac{\left(\frac{\lambda_n}{\mu_n}\right)^{j_n}}{j_n!} e^{-[\lambda_1/\mu_1 + \lambda_2/\mu_2 + \lambda_3/\mu_3 + \ldots\ldots \lambda_n/\mu_n \, right]}$$

(2.5)

यही साँख्यिकीय साम्यावस्था में संयुक्त प्रायिकता का सार्वीकृत स्वरूप है। एक-दिवसीय, दो दिवसीय जन्म एवं मृत्यु की प्रक्रियाओं का अध्ययन इस सार्वीकृत प्रायिकता का विशिष्ट रूप है।

3. प्रमुख विश्लेषण

यदि $$\left(j_1 + j_2 + j_3 + ... + j_n\right) < S < \infty \tag{3.a}$$

यहाँ समस्त ग्राहकों की संख्या सेवकों की संख्या से कम है। अतः सेवार्थ आने वाले प्रत्येक ग्राहक को एक सेवक बैठा मिलेगा और उसको तुरन्त सेवा मिल जायेगी अतः पंक्ति का निर्माण नहीं होगा।

यदि $$\left(j_1 + j_2 + j_3 + ... + j_n\right) = S < \infty \tag{3.b}$$

इस परिकल्पना के अंतर्गत स्थितियाँ

$$\left\{E_{j_1+1,\, j_2,\, j_3,\, ...\, j_n}\right\},\ \left\{E_{j_1,\, j_2+1,\, ...\, j_n}\right\}\ ....\ \left\{E_{j_1,\, j_2,\, j_3,\, ...\, j_{n+1}}\right\}$$

अस्तित्व में नहीं आयेंगी।

अतः समीकरण (2.1) को ऊपर के विचार से इस प्रकार लिखा जा सकता है–

$$\left(j_2\ \mu_1 + j_2\ \mu_2 + j_3\ \mu_3 + ... + j_n\ \mu_n\right)\ P\left(j_1, j_2, j_3, ... j_n\right)$$

$$= \lambda_1\ P\left(j_1 - 1, j_2, ... j_n\right) + \lambda_2\ P\left(j_1, j_2 - 1, j_3, ... j_n\right)$$
$$+ ..... + \lambda_n\ P\left(j_1, j_2, ... j_n - 1\right) \tag{3.1}$$

प्रायिकता (2.5) समीकरण (3.1) को भी संतुष्ट करेगी।

प्रायिकता $P(j)$ को जहाँ j ग्राहक सेवा पा रहे हैं इस प्रकार लिखते हैं–

$$P(j) = \sum_{j_1+j_2+j_3+....j_n = j} P\left(j_1, j_2, j_3, ...j_4, ... j_n\right)$$

$$= \sum_{j_1 + j_2 + ...j_n = j} P(j_1)\ P(j_2)\ P(j_3)\ .....\ P(j_4)\ .....\ P(j_n)$$

$$= \sum_{j_1 + j_2 + ... + j_n = j} \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{j_1}}{j_1!} \frac{\left(\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)^{j_2}}{j_2!} \frac{\left(\frac{\lambda_3}{\mu_3}\right)^{j_3}}{j_4!} \frac{\left(\frac{\lambda_4}{\mu_4}\right)^{j_4}}{j_3!} \cdots\cdots \frac{\left(\frac{\lambda_n}{\mu_n}\right)^{j_n}}{j_n!} \cdot C$$

$$= \sum_{j_1 + j_2 + ... + j_n = j} \prod_{r=1}^{n} \left(\frac{(\lambda_r / \mu_r)^{j_r}}{r!} \right) . C \qquad (3.2)$$

जहाँ C एक अचर है और इसकी गणना सामान्यीकरण समीकरण $\sum_{q=0}^{s} P(q) = 1$ से की जा सकती है।

इस प्रकार

$$\sum_{q=0}^{s} \left(\sum_{j_1 + j_2 + ... + j_n = q} \prod_{r=1}^{n} \left(\frac{\lambda_r / \mu_r}{J_r!} \right)^{j_r} \right) \cdot C = 1$$

अतः

$$C = \left[\sum_{q=0}^{s} \left(\sum_{j_1 + j_2 + ... + j_n = q} \prod_{r=1}^{n} \frac{(\lambda_r / \mu_r)^{j_r}}{j_r!} \right) \right]^{-1}$$

C के मान का प्रयोग करने पर

$$P(j) = \frac{\sum_{j_1 + j_2 + ... + j_n = q} \prod_{r=1}^{n} \frac{(\lambda_r / \mu_r)^{j_r}}{j_r!}}{\sum_{q=0}^{s} \left(\sum_{j_1 + j_2 + ... + j_n = q} \prod_{r=1}^{n} \frac{(\lambda_r / \mu_r)^{j_r}}{j_r!} \right)}$$

निर्देश

1. वर्क, पी० जे० : The Annals of Mathematical Statistics, 1956, No. 4, 39.

2. बैंडवाजन, ए० : Operations Research, 1970, 27, No. 3, 595-605.

3. कपूर, आर० वी० : Introduction to Queueing Theory, 1981.

4. जैक्शन, आर० आर० पी० तथा एस्पडेन, पी० : Operations Research, 1980, 28, 618-622.

5. प्रभु, यन० यू० तथा भाट, यू० यन० : Operations Research, 1963, 11, 380-386.

6. सुबेलमन, ई० जे० : Stoch. Proc. and APPI, 1976, 4, 253-259.

7. स्काट, एम० तथा उल्मेर, यम० वी० : Zeilt. f. Oprs. Res, 1972, 16, 199-204.

8. स्काट, एम० : Operations Research, 1972, 20, 421.

9. टैकाक्स, एल० : Introduction to Theory of Queues, Oxford University Press, Oxford, 1962.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 44, No. 2, April 2001.

किसी बहुपद के ध्रुवीय अवकलज के लिए कुछ असमिकाएँ

के० के० दीवान, हरीश सिंह तथा आर० एस० यादव
गणित विभाग, प्राकृतिक विज्ञान संकाय, जामिया मिलिया इस्लामिया, नई दिल्ली-25

[प्राप्त – दिसम्बर 20ā 2000]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में किसी बहुपद के ध्रुवीय अवकलज के लिए असमिकाएँ प्राप्त की गई हैं जो एक ज्ञात परिणाम को सर्वीकृत करने के साथ ही उसे सुधारती हैं।

Abstract

Some inequalities for a polar derivative of a polynomial. *By* K. K. Dewan, Harish Singh and R. S. Yadav, Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Jamia Millia Islamia, New Delhi-110 025.

In this paper inequalities for a polar derivative of a polynomial have been obtained which generalize as well as improve upon a well known result.

1. प्रस्तावना तथा परिणामों के बारे में वक्तव्य

माना कि $D_\alpha p(z)$ प्रदर्शित करता है बिन्दु α के प्रति कोटि n के बहुपद $p(z)$ के ध्रुवीय अवकलज को

$$D_\alpha p(z) = np(z) + (\alpha - z)p'(z).$$

बहुपद $D_\alpha p(z)$ अधिक से अधिक (n–1) कोटि का है और यह सामान्य अवकलज को इस रूप में सार्वीकृत करता है कि

$$\lim_{\alpha \to \infty} \left\{ \frac{D_\alpha p(z)}{\alpha} \right\} = p'(z) \tag{1.1}$$

इकाई वृत्त पर $|p'(z)|$ के एस्टीमेट के बारे में हमें प्राप्त होता है

$$\max_{|z|=1} |p'(z)| \le n \max_{|z|=1} |p(z)|. \tag{1.2}$$

असमिका (1.2) त्रिकोणमितीय बहुपद के अवकलज पर बर्नस्टाइन के प्रमेय का त्वरित परिणाम है (देखें निर्देश[8]) । (1.2) में समिका उस बहुपद के लिये सत्य है जिसके सारे शून्य मूल बिन्दु में हों।

यदि हम अपने आपको डिस्क $|z| < 1$ में शून्यों वाले बहुपदों की श्रेणी तक ही सीमित रखें तो असमिका (1.2) को और तीक्ष्ण बनाया जा सकता है। एर्डोस ने अनुमान लगाया था तथा बाद में लैक्स[5] ने सिद्ध किया कि यदि $|z| < 1$ में $p(z) \neq 0$ तो

$$\max_{|z|=1} |p'(z)| \le \frac{n}{2} \max_{|z|=1} |p(z)|. \tag{1.3}$$

से प्रतिस्थापित किया जा सकता है। (1.3) में असमिका $p(z) = \alpha + \beta z^n$ के लिए सत्य उतरती है जहाँ $|\alpha| = |\beta|$.

n कोटि वाले बहुपदों p(z) की एक श्रेणी के लिए जिसके समस्त शून्य $|z| \le 1$ में हों, तूरान[11] ने सिद्ध किया है कि

$$\max_{|z|=1} |p'(z)| \ge \frac{n}{2} \max_{|z|=1} |p(z)|. \tag{1.4}$$

परिणाम सुस्पष्ट और (1.4) में आयी समिका $p(z) = (z+1)^n$ के लिए सत्य है। अजीज तथा दाउद[1] ने असमिका को तीक्ष्ण करने के लिए $\max_{|z|=1} |p(z)|$ लिया और इसे

$$\max_{|z|=1} |p'(z)| \ge \frac{n}{2} \left\{ \max_{|z|=1} |p(z)| + \max_{|z|=1} |p(z)| \right\} \tag{1.5}$$

से प्रतिस्थापित किया। असमिका (1.5) सर्वसम्भव है तथा समिका सत्य है $p(z) = \alpha z^n + \beta$ के लिए जहाँ $|\beta| \le |\alpha|$. गोविले[3] (देखें मलिक[6] भी) असमिका (1.5) कोटि n वाले बहुपदों $p(z)$ की श्रेणी के लिए, जिसमें इसके सारे शून्य $|z| \le k$, $k \le 1$ में से सर्वीकृत किया और ज्ञात किया कि

$$\max_{|z|=1} |p'(z)| \ge \frac{n}{1+k} \left\{ \max_{|z|=1} |p(z)| + \frac{1}{k^{n-1}} \min_{|z|=k} |p(z)| \right\} \tag{1.6}$$

शाह[9] ने तूरान की असमिका (1.4) को बहुपद $p(z)$ के ध्रुवीय अवकलज तक विस्तृत किया और सिद्ध किया कि

प्रमेय A. यदि $p(z)$ कोटि n का बहुपद हो जिसके सारे शून्य $|z| < 1$ में हों तो प्रत्येक वास्तविक या संमिश्र संख्या α के लिए $|\alpha| \geq 1$ सहित

$$\max_{|z|=1} |D_\alpha p(z)| \geq \frac{n}{2} (|\alpha| - 1) \max_{|z|=1} |p(z)|. \tag{1.7}$$

यह परिणाम सुस्पष्ट है और (1.7) में असमिका $\alpha \geq 1$ सहित $p(z) = (z-1)^n$ के लिए लागू होती है। राथर[1] ने प्रमेय A को निम्नलिखित परिणाम को सिद्ध करते हुए सुधारा है जो बहुपद के ध्रुवीय अवकलज की असमिका (1.5) का सार्वीकरण भी है।

प्रमेय B. यदि $p(z)$ कोटि n का बहुपद हो जिसके सारे शून्य $|z| \leq 1$ में हों तो प्रत्येक वास्तविक या संमिश्र संख्या α के लिए $|\alpha| \geq 1$ सहित परिणाम अस्पष्ट है और असमिका $\alpha \geq 1$ सहित $p(z) = (z-1)^n$ के लिए सही उतरती है।

$$\max_{|z|=1} |D_\alpha p(z)| \geq \frac{n}{2} \times \left\{ (|\alpha| - 1) \max_{|z|=1} |p(z)| + (|\alpha| + 1) \min_{|z|=1} |p(z)| \right\} \tag{1.8}$$

अजीज तथा राथर[2] ने प्रमेय A का निम्नांकित सार्वीकरण दिया है जो असमिका (1.6) को बहुपद $p(z)$ के ध्रुवीय अवकलन तक विस्तृत भी करती है।

प्रमेय C. यदि कोटि n के बहुपद $p(z) = c \prod_{v=1}^{n} (z - z_v)$ के सारे शून्य $|z| \leq k$ में पड़ें जहाँ K≥1 तो प्रत्येक वास्तविक या संमिश्र संख्या α लिए $|\alpha| \leq k$ के साथ

$$\max_{|z|=1} |D_\alpha p(z)| \geq (|\alpha| - k) \sum_{J=1}^{n} \frac{1}{1 + |z_v|} \max_{|z|=1} |p(z)| \tag{1.9}$$

परिणाम अस्पष्ट है और (1.9) में आयी समिका $p(z) = (z-k)^n$ के लिए सत्य है जहाँ $a \geq k$

यहाँ, हम सर्वप्रथम प्रमेय A का सम्प्रयोग करते हुए ध्रुवीय अवकलनों के लिए निम्नांकित परिणाम सिद्ध करेंगे–

प्रमेय 1. यदि $p(z)$ कोटि n का बहुपद हो जिसमें $|z| < 1$ में कोई शून्य नहीं है और यदि δ कोई वास्तविक या संमिश्र संख्या हो $|\alpha| \leq 1$ सहित तो

$$\max_{|z|=1} |D_\delta p(z)| \geq \frac{1}{2} (1 - |\delta|) \max_{|z|=1} |p(z)|. \tag{1.10}$$

यह परिणाम सुस्पष्ट है और (1.10) की समिका $p(z) = (z-1)^n$ के लिए सत्य है जहाँ $\delta \geq 0$

टिप्पणी 1. यंह हम असमिका (1.10) में $\delta = 0$ लें तो

$$\max_{|z|=1} |np(z) - zp'(z)| \geq \frac{n}{2} \max_{|z|=1} |p(z)|$$

अथवा

$$\max_{|z|=1} |q'(z)| \geq \frac{n}{2} \max_{|z|=1} |p(z)|.$$

उपर्युक्त असमिका में असमिका (1.3) का प्रयोग करने पर

$$\max_{|z|=1} |q'(z)| \geq \max_{|z|=1} |p'(z)|.$$

जो गोविल के परिणाम[4] की विशिष्ट दशा है।

इसके बाद प्रमेय 1 के निम्नांकित सुधरे रूप को सिद्ध करेंगे–

प्रमेय 2. यदि $p(z)$ कोटि n का बहुपाद हो जिसमें $|z| < 1$ में कोई शून्य नहीं और यदि δ कोई वास्तविक या संमिश्र संख्या हो, $|\delta| \leq 1$ सहित तो

$$\max_{|z|=1} |D_\delta p(z)| \geq \frac{n}{2} \times \left\{ (1 - |\delta|) \max_{|z|=1} |p(z)| + (1 + |\delta|) \min_{|z|=1} |p(z)| \right\}. \tag{1.11}$$

परिणाम सुस्पष्ट है और $\delta \geq 0$ के साथ समिका $p(z) = (z - 1)^n$ के लिए सत्य उतरती है।

टिप्पणी 2. यदि हम असमिका (1.11) में $\delta = 0$ लें तो

$$\max_{|z|=1} |np(z) - zp'(z)| \geq \frac{n}{2} \left\{ \max_{|z|=1} |p(z)| + \min_{|z|=1} |p(z)| \right\}$$

अथवा

$$\max_{|z|=1} |q'(z)| \geq \frac{n}{2} \left\{ \max_{|z|=1} |p(z)| + \min_{|z|=1} |p(z)| \right\}$$

उपर्युक्त असमिका में असमिका (1.3) का उपयोग करने पर हमें

$$\max_{|z|=1} |q'(z)| \geq \max_{|z|=1} |p'(z)| + \frac{n}{2} \min_{|z|=1} |p(z)|$$

प्राप्त होता है जो गोविल के परिणाम [4, Lemma 3, k = 1 के लिए] का सुधरा रूप है। इसके बाद प्रमेय 1 का सार्वीकरण प्राप्त करेंगे यानी हम सिद्ध करेंगे कि

प्रमेय 3. यदि $p(z) = c \prod_{v=1}^{n} (z - z_v)$ कोटि n का बहुपद हो जिसके एक भी शून्य $|z| \le k$ में न हों $k \ge 1$ तथा δ कोई वास्तविक या संमिश्र संख्या हो $|\delta| \le k$ सहित तो,

$$\max_{|z|=1} |D_\delta p(z)| \ge \left(\frac{k - |\delta|}{k}\right) \sum_{v=1}^{n} \frac{|z_v| -}{1 + |z_v|} \max_{|z|=1} |p(z)|. \tag{1.12}$$

यह परिणाम दशा $|z_v| = k$, $1 \le v \le n$ के लिए बहुपद $p(z) = (z - k)^n$ हेतु सम्भव है जहाँ $\delta \ge 0$

निम्नांकित उपप्रमेय प्रमेय 3 का त्वरित प्रतिफल है।

उपप्रमेय 1. यदि p(z) कोटि n का बहुपद हो जिसमें $|z| < k$, में कोई शून्य न हो, $k \ge 1$ तथा यदि δ कोई वास्तविक या संमिश्र संख्या हो $|\delta| \le k$ सहित तो

$$\max_{|z|=1} |D_\delta p(z)| \ge \left(\frac{n(k - |\delta|)}{1 + k}\right) \max_{|z|=1} |p(z)|. \tag{1.13}$$

यह परिणाम सुस्पष्ट है और (1.13) में आयी समिका $p(z) = (z - k)^n$ के लिए सत्य उतरती हैं जहां $\delta \ge 0$

2. प्रमेयिका

यदि $p(z)$ कोटि n का बहुपद हो और α कोई वास्तविक या संमिश्र संख्या हो तो

$$\left| D_\alpha q(z) \right| \le \left| n\bar{\alpha} p(z) + (1 - \bar{\alpha} z) p'(z) \right| \text{ क्योंकि } |z| = 1 \tag{2.1}$$

जहाँ $q(z) = \overline{z^n p(1/\bar{z})}$.

उपर्युक्त प्रमेयिका शाह[10] की है।

3. प्रमेयों की उपपत्ति :

प्रमेय 1 की उपपत्ति : परिकल्पना के अनुसार बहुपद p (z) का $|z| < 1$ में कोई शून्य नहीं हो तो q(z) के सारे शून्य $|z| < 1$ में होगे। प्रमेय A का सम्प्रयोग बहुपद q (z) में करने पर

$$\max_{|z|=1} |D_\alpha q(z)| \ge \frac{n}{2} (1 - |\alpha|) \max_{|z|=1} |q(z)|. \tag{3.1}$$

अब प्रमेयिका से यह आसानी से निकलता है कि

$$\left| D_\alpha q(z) \right| = |\alpha| \left| D_{1/\alpha} p(z) \right| \tag{3.2}$$

क्योंकि $|z| = 1$.

(3.1) में (3.2) का प्रयोग करने पर

$$|\alpha| \max_{|z|=1} \left| D_{1/\alpha} p(z) \right| \geq \frac{n}{2} (|\alpha| - 1) \max_{|z|=1} |p(z)| \tag{3.3}$$

क्योंकि $|\alpha| \geq 1$.

$1/\alpha$ के स्थान पर δ रखने पर, जिससे कि $|\delta| \geq 1$, हमें (3.3) से

$$\frac{1}{|\delta|} \max_{|z|=1} \left| D_\delta p(z) \right| \geq \frac{n}{2} \left(\frac{1}{|\delta|} - 1 \right) \max_{|z|=1} |p(z)|$$

या

$$\max_{|z|=1} \left| D_\delta p(z) \right| \geq \frac{n}{2} (1 - |\alpha|) \max_{|z|=1} |p(z)|$$

प्राप्त होता है क्योंकि $|z| < 1$। इससे प्रमेय 1 पूरी तरह सिद्ध हो जाती है।

प्रमेय 2 की उपपत्ति : परिकल्पना के अनुसार बहुपद p(z) में | z <| में कोई शून्य नहीं होते इसलिए बहुपद $q(z) = z^n p\left(\overline{1/\bar{z}}\right)$ में $|z| < 1$ में कोई शून्य नहीं होते (या q(z) के सारे शून्य $|z| < 1$ में होते हैं। अब प्रमेय B का सम्प्रयोग बहुपद q (z) में करने पर

$$\max_{|z|=1} |D_\delta q(z)| \geq \frac{n}{2} \times \left\{ (|\alpha| - 1) \max_{|z|=1} |q(z)| + (|\alpha| + 1) \min_{|z|=1} |q(z)| \right\}$$

क्योंकि $|\alpha| < 1$

इसका अर्थ हुआ कि

$$\max_{|z|=1} |D_\delta q(z)| \geq \frac{n}{2} \times \left\{ (|\alpha| - 1) \max_{|z|=1} |p(z)| + (|\alpha| + 1) \min_{|z|=1} |p(z)| \right\} \tag{3.4}$$

अब प्रमेयिका से यह सरलता से निकलता है कि

$$\left| D_\alpha q(z) \right| = |\alpha| \left| D_{1/\alpha} p(z) \right| \tag{3.5}$$

क्योंकि $|z| = 1$.

(3.4) में (3.5) का उपयोग करने पर

$$|\alpha| \max_{|z|=1} \left| D_{1/\alpha} p(z) \right| \geq \frac{n}{2} \times \left\{ (|\alpha| - 1) \max_{|z|=1} |p(z)| + (|\alpha| + 1) \min_{|z|=1} |p(z)| \right\} \tag{3.6}$$

$1/\alpha$ के स्थान δ रखने पर, जिससे कि $|\delta| \geq 1$, हमें (3.6) से

$$\max_{|z|=1} \left| D_\delta p(z) \right| \geq \frac{n}{2} \times \left\{ (1 - |\alpha|) \max_{|z|=1} |p(z)| + (1 + |\alpha|) \min_{|z|=1} |p(z)| \right\}$$

प्राप्त होता है क्योंकि $|z| < 1$ तथा $|\delta| \geq 1$ इससे प्रमेय 2 पूर्णतया सिद्ध हो जाता है।

प्रमेय 3 की उपपत्ति : परिकल्पना के अनुसार बहुपद p (z) में $|z| < k$ में कोई शून्य नहीं होते जहाँ $k \geq 1$, तो q (z) के सारे शून्य $|z| < 1|k$, $1|k \leq 1$ में होते हैं। बहुपद q (z) में प्रमेय C प्रयुक्त करने पर

$$\max_{|z|=1} \left| D_\alpha q(z) \right| \geq \left(|\alpha| - \frac{1}{k} \right) \sum_{v=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{1}{|z_v|}} \max_{|z|=1} |q(z)| \tag{3.7}$$

क्योंकि $|\alpha| \geq 1/k$.

अब प्रमेयिका से यह निकलता है कि

$$\left| D_\alpha q(z) \right| = |\alpha| \left| D_{1/\alpha} p(z) \right| \tag{3.8}$$

क्योंकि $|z| = 1$.

(3.7) में (3.8) का प्रयोग करने पर हमें

$$|\alpha| \max_{|z|=1} \left| D_{1/\alpha} p(z) \right| \geq \left(|\alpha| - \frac{1}{k} \right) \sum_{v=1}^{n} \frac{|z_v|}{1 + |z_v|} \max_{|z|=1} |p(z)| \tag{3.9}$$

मिलता है क्योंकि $|\alpha| \geq 1/k$.

$1/\alpha$ के स्थान पर δ रखने पर, जिससे कि $|\delta| \geq 1$, तो हमें (3.9) से

$$\frac{1}{|\delta|} \max_{|z|=1} \left| D_\alpha p(z) \right| \geq \left(\frac{k - |\delta|}{|\delta| \, k} \right) \sum_{\nu=1}^{n} \frac{|z_\nu|}{1 + |z_\nu|} \max_{|z|=1} |p(z)|$$

या

$$\max_{|z|=1} \left| D_\alpha p(z) \right| \geq \left(\frac{k - |\delta|}{k} \right) \sum_{\nu=1}^{n} \frac{|z_\nu|}{1 + |z_\nu|} \max_{|z|=1} |p(z)|$$

मिलेगा क्योंकि $|\delta| \geq 1$. इस तरह प्रमेय 3 पूरी तरह सिद्ध हो जती है।

निर्देश

1. अजीज, ए० तथा दाउद, क्यू० एम० : J. Approx. Theory, 1988, 54, 306-313.
2. अजीज़, ए० तथा राथर, एन० ए० : J. Math. Ineq. Appl., 1988, I, 231-238.
3. गोविल, एन० : Jour. Math. Phy. Sci., 1980, 14 (2) 183-187.
4. लैक्स, पी० डी० : Bull. Amer. Math. Soc., 1944, 50, 509-513.
5. मलिक, एम० ए० : J. London Math. Soc. 1969, I, 57-60.
6. राथर, एन० ए० : पी-एच० डी० थीसिस, कश्मीर विश्वविद्यालय 1998.
7. शेफर, ए० सी० : Bull. Amer. Math. Soc., 1941, 47, 565-579
8. शाह, डब्लू० एम० : J. Ramanujan Math. Soc. 1996, II, 67-72.
9. वही : पी-एच० डी० थीसिस, कश्मीर विश्वविद्यालय, 1998.
10. तूरान, पी० : Compositio Math. Soc., 1939, 7, 89-95.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 44, No. 2, April 2001.

मैट्रिक्स आर्गुमेंट का लाप्लास रूपान्तर

आर० के० कुम्भट तथा योगेश शर्मा
गणित तथा सांख्यिकी विभाग, जे० एन० व्यास विश्वविद्यालय, जोधपुर (राज०)

[प्राप्त — नवम्बर 6, 2000]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य मैट्रिक्स आर्गुमेंट के लाप्लास रूपान्तर के दो नवीन गुणों को स्थापित करना तथा उनके सम्प्रयोग से मैट्रिक्स आर्गुमेंट वले कतिपय समाकलों का मान ज्ञात करना है।

Abstract

On Laplace transform of matrix argument. *By* R. K. Kumbhat and Yogesh Sharma, Department of Mathematics and Statistics, Jai Narain Vyas University, Jodhpur (Raj.).

The aim of the present paper is to establish two new properties of the Laplace transform of matrix argument and to evaluate certain integrals involving matrix argument by their applications. All the matrices considered are real, positive, definite and symmetric of order $p \times p$.

1. प्रस्तवना

समीकरण
$$L_z[f(\Lambda)] = \int_{\Lambda > 0} etr(-\Lambda Z)\, f(\Lambda)\, d\Lambda = \phi(Z) \qquad (1.1)$$

समष्टि S_m में माप $d\Lambda$ के प्रति समाकल है जहाँ Λ तथा Z वास्तविक, धनात्मक, सान्त तथा कोटि $B\ p \times p$, $Z = [\delta_{ij}\, z_{ij}]$, trx = x का रंच = x के प्रमुख तत्वों का योगफल f संमित फलन है इस अर्थ में कि f (AB) = f (BA) तथा

$$d\Lambda = d\Lambda_{11}\ d\Lambda_{21}\ d\Lambda_{22} \ldots d\Lambda_{p1} \ldots d\Lambda_{pp}$$

जो समस्त वास्तविक धनात्मक, सान्त तथा संमित मैट्रिक्सों को समेटती है। यदि संमिश्र वैश्लेषिक फलन $\phi(z)$ दक्षिणी अर्ध तल $R(Z) > X_0$ पर पूर्णतया अभिसारी हो तो (1.1) $f(\Lambda)$ का लाप्लास रूपान्तर कहलाता है जहाँ R (.) का अर्थ है (.) का असली अंश, Xo स्थिर मान है x तथा Z का और $Z = X + iY$, $i = \sqrt{-1}$

इस प्रपत्र के द्वारा हम लाप्लास रूपान्तर को सांकेतिक रूप में निम्नवत् प्रदर्शित करेंगे—

$$\phi(P) \, L \, f(T)$$

इस क्रम में निम्नांकित परिणामों की आवश्यकता होगी—

$$\Gamma_p(\beta), F_0\left(\alpha, -A^{1/2} Z^{-1} A^{1/2}\right) \underline{\underline{L}} \; |T - U|^{\beta - (p+1)/2}$$

$$\cdot {}_1F_1\left(\alpha, \beta, -A^{1/2} (T - U) A^{1/2}\right); \; R(\beta) > \left(\frac{p-1}{2}\right) \tag{1.2}$$

$$|B + P|^{\alpha} \, G^{m, n+1}_{p+1, s}\left[A(B + P)^{-1} \middle| \begin{matrix} \frac{(p+1)}{2} + a, a_1, \ldots, a_r \\ b_1, \ldots, b_s \end{matrix} \right]$$

$$\underline{\underline{L}} \; |T|^{-a-(p+1)/2} \, etr(-BT) \, G^{m,n}_{p,q}\left[AT \middle| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_r \\ b_1, \ldots, b_s \end{matrix} \right];$$

$$\times \, R\left(-\alpha + \min b_j\right) > (p-1)/2 \tag{1.3}$$

कई लेखकों द्वारा[1, 2, 3 5, 7, 8, 9] मैट्रिक्स आर्गुमेंट सहित विशिष्ट फलन का सम्प्रयोग दिया गया है।

2. प्रमेय

प्रमेय 1: यदि

$$\phi_1(P) \underline{\underline{L}} \; g_1(T) \quad \text{तथा} \quad \phi_2(P) \underline{\underline{L}} \; g_2(T)$$

तो

$$\int_{T>0} \phi_1(T) g_2(T) \, dT = \int_{T>0} g_1(T) \phi_2(T) \, dT \tag{2.1}$$

बशर्ते कि $g_1(T)$ एवं $g_2(T)$ के लाप्लास रूपान्तर विद्यमान हों तथा समाकल पूर्णतया अभिसारी हों।

उपपत्ति : हमें प्राप्त है

$$\phi_1(P) = \int_{T>0} etr(-PT)\, g_1(T)\, dT$$

तथा

$$\phi_2(P) = \int_{T>0} etr(-PT)\, g_2(T)\, dT$$

तो

$$\int_{T>0} \phi_1(T)\, g_2(T)\, dT = \int_{T>0} \left[\int_{U>0} etr(-TU)\, g_1(U)\, dU \right] g_2(T)\, dT$$

समाकलन का क्रम बदलने पर

$$\int_{T>0} \phi_1(T)\, g_2(T)\, dT = \int_{U>0} g_1(U) \left[\int_{T>0} etr(-TU)\, g_2(T)\, dT \right] dU$$

$$= \int_{U>0} g(U)\, \phi_2(U)\, dU$$

प्रमेय 2 : यदि

$$\psi(P) \underset{=}{L} \phi(T)$$

तथा

$$\frac{\phi(P)\,|P|^{\nu-\beta+(p+1)/2}\,|A|^{-\beta}\,|I+AP|^{\alpha}}{\Gamma_p(\alpha)} \underset{=}{L} h(T)$$

तो

$$\psi(P) = \int_{T>0} |T+P|^{\nu}\, G_{2,2}^{1,2}$$

$$\times \left[A(T+P)^{-1} \left| \begin{matrix} \frac{(p+1)}{2} - \alpha + \beta,\ \nu + \frac{(p+1)}{2} \\ \beta \end{matrix} \right. \right] h(T)\, dT \tag{2.2}$$

क्योंकि $R(\alpha, \beta, \nu) > \frac{(p+1)}{2}$

उपपत्ति : परिभाषा के अनुसार हम पाते हैं कि

$$\psi(P) = \int_{T>0} etr(-PT)\phi(T)\,dT$$

$$\frac{\phi(P)|P|^{\nu-\beta+(p+1)/2}|A|^{-\beta}|I+AP|^{\alpha}}{\Gamma_p(\alpha)} = \int_{T>0} etr(-PT)h(Z)\,dZ$$

इसलिए इससे निकलता है कि

$$\psi(P) = \frac{1}{\Gamma_p(\alpha)} \int_{T>0} etr(-PT)|T|^{-\nu+\beta-(p+1)/2}|A|^{\beta}|I+AT|^{-\alpha}$$

$$\times \left(\int_{Z>0} etr(-ZT)h(Z)\,dZ \right) dT$$

समाकलन का क्रम बदलने तथा (1.3) के उपयोग द्वारा T समाकलन का मान निकालने पर

$$\psi(P) = \int_{Z>0} |Z+P|^{\nu}\, G^{1,2}_{2,2}$$

$$\times \left[A(Z+P)^{-1} \left| \begin{matrix} \frac{(p+1)}{2} - \alpha + \beta,\ \nu + \frac{(p+1)}{2} \\ \beta \end{matrix} \right. \right] h(Z)\,dZ$$

इस तरह प्रमेय सिद्ध हो जाता है।

उदाहरण : यदि हम निम्नांकित को लें

$$\frac{\phi(T)|T|^{\nu-\beta+(p+1)/2}|A|^{-\beta}|I+AT|^{\alpha}}{\Gamma_p(\alpha)} = |T|^{\nu+\beta-\alpha+(p+1)/2}$$

$$\times \underline{\underline{L}}\ \frac{|T|^{\alpha-\beta-\nu-(p+1)}}{\Gamma_p(\alpha-\beta-\nu-(p+1)/2)} = h(T)$$

$$\phi(T) = \Gamma_p(\alpha)|T|^{2\beta-\alpha}|A|^{\beta}|I+AT|^{-\alpha}$$

$$= \Gamma_p(\alpha)\,|T|^{\beta-\alpha}\, G^{1,1}_{1,1}\left[AT \,\middle|\, \begin{matrix} \frac{(p+1)}{2} - \alpha + \beta \\ \beta \end{matrix}\right]$$

$$\Gamma_p(\alpha)\,|P|^{\alpha-\beta-(p+1)/2}\, G^{1,2}_{2,2}\left[AP^{-1} \,\middle|\, \begin{matrix} \alpha-\beta,\ \frac{(p+1)}{2} - \alpha + \beta \\ \beta \end{matrix}\right] = \psi(P) \underline{\underline{L}}\ \phi(T)$$

$$\left[AP^{-1} \,\middle|\, \begin{matrix} \alpha-\beta,\ \frac{(p+1)}{2} - \alpha + \beta \\ \beta \end{matrix}\right] = \psi(P) \underline{\underline{L}}\ \phi(T)$$

(2.2) को व्यवहृत करने पर—

$$\frac{1}{\Gamma_p\left(\alpha - \beta - \nu - \frac{(p+1)}{2}\right)} \int_{T>0} |T|^{\alpha-\beta-\nu-(p+1)}\,|T+P|^{\nu}\, G^{1,2}_{2,2}$$

$$\times \left[A(T+P)^{-1} \,\middle|\, \begin{matrix} \frac{(p+1)}{2} - \alpha + \beta,\ \nu + \frac{(p+1)}{2} \\ \beta \end{matrix}\right] dT$$

$$= \Gamma_p(\alpha)\,|P|^{\alpha-\beta-\frac{(p+1)}{2}}\, G^{1,2}_{2,2} \times \left[AP^{-1} \,\middle|\, \begin{matrix} \alpha-\beta,\ \frac{(p+1)}{2} - \alpha + \beta \\ \beta \end{matrix}\right]$$

क्योंकि $\quad R(\alpha, \beta, \nu) > \frac{(p+1)}{2}$

प्रमेय 3 : यदि

$$\phi(P) \underline{\underline{L}}\ \Gamma_p(\beta)\,|T+A|^{-\alpha}\,|T|^{\alpha}\, h(T) \qquad (3.1)$$

तथा $\qquad \psi(P) \underline{\underline{L}}\ h(T)$

तो $\quad \phi(P) = \int_{T>0} |T-U|^{\beta-\frac{(p+1)}{2}} \times {}_1F_1\left(\alpha, \beta, -A^{1/2}(T-U)A^{1/2}\right) \psi(P+T)\, dT$ (3.2)

क्योंकि $R(\alpha,\ \beta) > \frac{(p+1)}{2}$

उपपत्ति : हमें ज्ञात है कि

$$\psi(P) \underset{=}{L}\ h(T)$$

तथा मथाई [9, page 173, 4.8 (i)] का प्रयोग करने पर

$$\psi(P+B) \underset{=}{L}\ e^{-tr(BT)} h(T) \tag{3.3}$$

(3.1) तथा (3.3) में (1.2) का सम्प्रयोग करने पर हम पाते हैं

$$\Gamma_p(\beta) \int_{T>0} etr(-BT) |T+A|^{-\alpha} |T|^{\alpha} h(T)\, dT$$

$$= \int_{T>0} |T-U|^{\beta - \frac{(p+1)}{2}} \times {}_1F_1\left(\alpha,\ \beta,\ -A^{1/2}(T-U)A^{1/2}\right) \psi(B+T)\, dT$$

B के स्थान पर P रखने पर प्रमेय प्राप्त हो जाता है।

उदाहरण : माना कि

$$h(T) = |T+A|^{\nu} |T|^{-\nu-\beta}$$

$$\phi(P) \underset{=}{L}\ \Gamma_p(\beta) |T+A|^{\nu-\alpha} |T|^{\alpha-\nu-\beta}$$

$$= \Gamma_p(\beta)\Gamma_p\left(\beta - \frac{(p+1)}{2}\right) |P|^{\frac{(p+1)}{2}-\beta} \times {}_2F_0\left(\alpha-\nu,\ \beta - \frac{(p+1)}{2},\ -AP^{-1}\right)$$

$$\psi(P) \underset{=}{L}\ |T+A|^{\nu} |T|^{-\nu-\beta}$$

$$= \Gamma_p\left(\beta - \frac{(p+1)}{2}\right) |P|^{\frac{(p+1)}{2}-\beta} \times {}_2F_0\left(-\nu,\ \beta - \frac{(p+1)}{2},\ -AP^{-1}\right)$$

तो

$$\int_{T>0} |T - U|^{\beta - \frac{(p+1)}{2}} {}_1F_1\left(\alpha, \beta, - A^{1/2}(T - U) A^{1/2}\right)$$

$$\times {}_2F_0\left(- \nu, \beta - \frac{(p + 1)}{2}, - A(T + P)^{-1}\right) dT$$

$$= \Gamma_p(\beta) {}_2F_0\left(\alpha - \nu, \beta - \frac{(p + 1)}{2}, - AP^{-1}\right)$$

क्योंकि $R(\alpha, \beta) > (p + 1)/2$ (3.4)

निर्देश

1. कांस्टैन्टाइन, ए० जी० : Ann Math. Statist., 1963, 34, 1270-1285.
2. वही : Ann Math. Statist., 1966, 37, 215-225.
3. डेवाल, डी० जे० : Ann Math. Statist., 1970, 41, 1091-1093.
4. वही : Ann Math. Statist. 1972, 43, 344-347.
5. फूजी कोशी, वाई० : J. Multivariate Anal, 1972, 2, 208-218.
6. जेम्स, ए० टी० : Ann Math. Statist., 1964, 35, 475-501.
7. वही : The Variance Information Manifold and Functions on it, Multivariate Anal. III, (Proc. Ist International Symp. Krishnaiah, ed.), 157-169 (1973).
8. मथाई, ए० एम० तथा सक्सेना, आर० के० : The H-functions with applications in statistics and other Disciplines, John Wiley & Sons, New York (1978).
9. मथाई, ए० एम० : A Handbook of Generalized Special function for Statistical and Physical Science, Oxford University Press, Oxford (1993).

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 44, No. 2, April 2001.

बहुचरीय I-फलन वाले सान्त त्रिगुण सम्बन्ध

आर० के० सक्सेना, चेना राम तथा होशियार सिंह
गणित तथा सांख्यिकी विभाग, जैनारायण व्यास विश्वविद्यालय, जोधपुर (राज०)

[प्राप्त – अक्टूबर 11, 2000]

सारांश

इस प्रपत्र में प्रसाद[4] के बहुचरीय I-फलन से सम्बद्ध चार सान्त त्रिगुण श्रेणी सम्बन्धों को व्युत्पन्न किया गया है।

Abstract

Finite triple series relations involving multivariable *I*-function. *By* R. K. Saxena, Chena Ram and Hoshiyar Singh, Department of Mathematics and Statistics, JNV University, Jodhpur.

This note deals with the derivation of four finite triple series relations associated with multivariable I-function due to Prasad[4].

प्रस्तावना

इस प्रपत्र का उद्देश्य प्रसाद[4] के बहुचरीय I-फलन वाले चार सान्त त्रिगुण श्रेणी सम्बन्धों को प्राप्त करना है। ये परिणाम अत्यन्त सामान्य प्रकृति के हैं जिनसे अनेक ज्ञात तथा अज्ञात सम्बन्धों को बहुचरीय I-फलन के प्राचलों के विशेषीकरण द्वारा प्राप्त किया जा सकता है।

प्रसाद[4] का अनुसरण करते हुए हम बहुचरीय I-फलन को निम्नवत् परिभाषित करते हैं।

$$I\left[z_1, \ldots, z_r\right] = I^{0, n_2; 0, n_3; \ldots; 0, n_r; (m', n');}_{p_2, q_2; p_3, q_3; \ldots; p_r, q_r; (p' q');}$$

$$\times \begin{matrix}(m'', n''); \ldots; (m^{(r)}, n^{(r)}) \\ (p'', q''); \ldots; (p^{(r)}, q^{(r)})\end{matrix} \left[\begin{matrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} A \\ \\ \\ \\ B \end{matrix}\right]$$

$$= -\frac{1}{(2\pi w)^r} \int_{L_1} \cdots \int_{L_r} \phi_1(s_1) \cdots \phi_r(s_r)\, \psi(s_1, \ldots, s_r)\, z_1^{s_1} \cdots z_r^{s_r}\, ds_1 \cdots ds_r \qquad (1)$$

जहाँ $w = \sqrt{-1}$;

$$A = \left(a_{2j};\ \alpha'_{2j}, \alpha''_{2j}\right)_{1,p_2}; \left(a_{3j};\ \alpha'_{3j}, \alpha''_{3j}, \alpha'''_{3j}\right)_{1,p_3}; \ldots;$$

$$\left(a_{rj};\ \alpha'_{rj}, \ldots, \alpha^{(r)}_{rj}\right)_{1,p_r}; \left(a'_j,\ \alpha'_j\right)_{1,p'}; \ldots; \left(a^{(r)}_j,\ \alpha^{(r)}_j\right)_{1,p^{(r)}};$$

$$B = \left(b_{2j};\ \beta'_{2j}, \beta''_{2j}\right)_{1,q_2}; \left(b_{3j};\ \beta'_{3j}, \beta''_{3j}, \beta'''_{3j}\right)_{1,q_3}; \ldots;$$

$$\left(b_{rj};\ \beta'_{rj}, \ldots, \beta^{(r)}_{rj}\right)_{1,q_r}; \left(b'_j,\ \beta'_j\right)_{1,q'}; \ldots; \left(b^{(r)}_j,\ \beta^{(r)}_j\right)_{1,q^{(r)}};$$

$$\phi_i(s_i) = \frac{\prod_{j=1}^{m^{(i)}} \Gamma\left(b^{(i)}_j - \beta^{(i)}_j s_i\right) \prod_{j=1}^{n^{(i)}} \Gamma\left(1 - a^{(i)}_j + \alpha^{(i)}_j s_i\right)}{\prod_{j=m^{(i)}+1}^{q^{(i)}} \Gamma\left(1 - b^{(i)}_j + \beta^{(i)}_j s_i\right) \prod_{j=n^{(i)}+1}^{p^{(i)}} \Gamma\left(a^{(i)}_j - \alpha^{(i)}_j s_i\right)}$$

$$\forall i \in \{1, \ldots, r\} \qquad (2)$$

$$\psi(s_1, \ldots, s_r) = \frac{\prod_{j=1}^{n_2} \Gamma\left(1 - a_{2j} + \sum_{i=1}^{2} \alpha^{(i)}_{2j} s_i\right) \prod_{j=1}^{n_3} \Gamma\left(1 - a_{3j} + \sum_{i=1}^{3} \alpha^{(i)}_{3j} s_i\right) \cdots}{\prod_{j=n_2+1}^{p_2} \Gamma\left(a_{2j} - \sum_{i=1}^{2} \alpha^{(i)}_{2j} s_i\right) \prod_{j=n_3+1}^{p_3} \Gamma\left(a_{3j} - \sum_{i=1}^{3} \alpha^{(i)}_{3j} s_i\right) \cdots}$$

$$\times \frac{\cdots \prod_{j=1}^{n_r} \Gamma\left(1 - a_{rj} + \sum_{i=1}^{r} \alpha^{(i)}_{rj} s_i\right)}{\cdots \prod_{j=n_r+1}^{p_r} \Gamma\left(a_{rj} - \sum_{i=1}^{r} \alpha^{(i)}_{rj} s_i\right) \prod_{j=n}^{q_2} \Gamma\left(1 - b_{2j} + \sum_{i=1}^{2} \beta^{(i)}_{2j} s_i\right)}$$

$$\times \frac{1}{\prod_{j=1}^{q_3} \Gamma\left(1 - b_{3j} + \sum_{i=1}^{3} \beta_{3j}^{(i)} s_i\right) \cdots \prod_{j=1}^{q_r} \Gamma\left(1 - b_{rj} + \sum_{i=1}^{r} \beta_{rj}^{(i)} s_i\right)}. \tag{3}$$

जहाँ रिक्त फलन से इकाई अभिप्रेत है, गुणांक $\alpha_j^{(i)}, \beta_j^{(i)}, \alpha_{kj}^{(i)}, \beta_{kj}^{(i)} (i = 1, ..., r; k = 2, ..., r)$ धनात्मक वास्तविक संख्याएं हैं $\alpha_j^{(i)}$, $\beta_j^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, r)$, a_{kj}, b_{kj} $(k = 2, \ldots, r)$ संमिश्र संख्याएं हैं तथा समस्त $m^{(i)}, n^{(i)}, p^{(i)} q^{(i)}$, $(i = 1, ..., r)$, n_k, p_k, q_k $(k = 2, \ldots, r)$ ऐसे अनृण पूर्णांक हैं कि $0 \le m^{(i)} \le q^{(i)}$, $0 \le n^{(i)} \le p^{(i)}$, $q_k > 0$, $0 \le n_k \le p_k$, $(i = 1, ..., r; k = 2, ..., r)$.

(1) में कंटूरों की प्रकृति, तथा बहुचरीय *I*-फलन के उपगामी प्रसार एवं विशिष्ठ दशाएं प्रसाद[4] के मूल प्रपत्र में देखी जा सकती हैं।

(1) में बहुगणित कंटूर समाकल पूर्णतया अभिसारी होता है यदि

$$\left|\arg z_i\right| < \frac{1}{2} \Delta_i \pi, \ \Delta_i > 0, \ i = 1, \ldots, r;$$

जहाँ

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^{n^{(i)}} \alpha_j^{(i)} - \sum_{j=n^{(i)}+1}^{p^{(i)}} \alpha_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{m^{(i)}} \beta_j^{(i)} - \sum_{j=n^{(i)}+1}^{q^{(i)}} \beta_j^{(i)}$$
$$+ \left(\sum_{j=1}^{n_2} \alpha_{2j}^{(i)} - \sum_{j=n_2+1}^{p_2} \alpha_{2j}^{(i)}\right) + \left(\sum_{j=1}^{n_3} \alpha_{3j}^{(i)} - \sum_{j=n_3+1}^{p_3} \alpha_{3j}^{(i)}\right) + \ldots$$
$$+ \left(\sum_{j=1}^{n_r} \alpha_{rj}^{(i)} - \sum_{j=n_r+1}^{p_r} \alpha_{rj}^{(i)}\right) - \left(\sum_{j=1}^{q_2} \beta_{2j}^{(i)} + \sum_{j=1}^{p_3} \beta_{3j}^{(i)} + \ldots + \sum_{j=1}^{q_r} \beta_{rj}^{(i)}\right)$$
$$\forall i \in \{1, \ldots, r\}. \tag{4}$$

(1) में $n_2 = n_3 = ... = n_{r-1} = 0 = p_2 + p_3 = ... = p_{r-1}$ तथा $q_2 = q_3 = \ldots = q_{r-1} = 0$ रखने पर यह श्रीवास्तव तथा पंडा[6] के बहुचरीय *H*-फलन में बदल जाता है।

मुख्य परिणाम

यहाँ पर निम्नांकित त्रिगुण संकलनों को स्थापित किया जाता है।

प्रथम संकलन

$$\sum_{u=0}^{M}\sum_{v=0}^{N}\sum_{t=0}^{P}\frac{(-M)_u\,(-N)_v\,(-P)_t}{u!\;v!\;t!}$$

$$\times\, I^{0,\; n_2+4;\,0,\,n_3\,;\;\ldots;\;0,\,n_r\,;\,(m',\,n')\,;}_{p_2+5,\,q_2+3;\,p_3\,,\,q_3\,;\;\ldots;\;p_r\,,\,q_r\,;\,(p',\,q')\,;}$$

$$\times\,{}^{(m'',\,n'')\,;\,\ldots\,;\,(m^{(r)},\;n^{(r)})}_{(p'',\,q'')\,;\;\ldots\,;\,(p^{(r)},\;q^{(r)})}\left[\begin{array}{c|c} z_1 & A_1 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ z_r & B_1 \end{array}\right]$$

$$= (-1)^{M+N+P}\, I^{0,\; n_2+4;\,0,\,n_3\,;\;\ldots;\;0,\,n_r\,;\,(m',\,n')\,;}_{p_2+5,\,q+3;\,p_3\,,\,q_3\,;\;\ldots;\;p_r\,,\,q_r\,;\,(p',\,q')\,;}$$

$$\times\,{}^{(m'',\,n'')\,;\,\ldots\,;\,(m^{(r)},\;n^{(r)})}_{(p'',\,q'')\,;\;\ldots\,;\,(p^{(r)},\;q^{(r)})}\left[\begin{array}{c|c} z_1 & E_1 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ z_r & F_1 \end{array}\right] \qquad (5)$$

जहाँ $d = a + b - c$ पूर्णांक नहीं,

तथा

$$A_1 = \left(1 - a - v - t;\; \theta', \ldots, \theta^{(r)}\right), \left(1 - c + a - u;\; \delta' - \theta', \ldots, \delta^{(r)} - \theta^{(r)}\right),$$

$$\left(1 - c + b - u - t;\; \delta' - \phi', \ldots, \delta^{(r)} - \phi^{(r)}\right), \left(1 - b - v;\; \phi', \ldots, \phi^{(r)}\right),$$

$$\left(a_{2j};\; \alpha'_{2j},\, \alpha''_{2j}\right)_{1,p_2}, \left(1 + d - N + v;\; \delta' - \theta' - \phi', \ldots, \delta^{(r)} - \theta^{(r)} - \phi^{(r)}\right),$$

$$\left(a_{3j};\; \alpha'_{3j},\, \alpha''_{3j}\, \alpha'''_{3j}\right)_{1,p_3};\, \ldots;\, \left(a_{rj};\; \alpha'_{rj}, \ldots, \alpha^{(r)}_{rj}\right)_{1,p_r};$$

$$\left(a'_j,\, \alpha'_j\right)_{1,p'};\, \ldots;\, \left(a^{(r)}_j,\, \alpha^{(r)}_j\right)_{1,p^{(r)}};$$

$$B_1 = \left(b_{2j};\, \beta'_{2j},\, \beta''_{2j}\right)_{1,q_2},\, \left(1 - c - u - v - t;\, \delta',\, \ldots,\, \delta^{(r)}\right),$$

$$\left(d + M - u;\, \delta' - \theta' - \phi',\, \ldots,\, \delta^{(r)} - \theta^{(r)} - \phi^{(r)}\right),$$

$$\left(b + P - a - t;\, \theta' - \phi',\, \ldots,\, \theta^{(r)} - \phi^{(r)}\right);\, \left(b_{3j};\, \beta'_{3j},\, \beta''_{3j}\, \beta'''_{3j}\right)_{1,q_3};$$

$$\ldots;\left(b_{rj};\, \beta'_{rj},\, \ldots,\, \beta^{(r)}_{rj}\right)_{1,q_r};\, \left(b'_j,\, \beta'_j\right)_{1,q'};\, \ldots;\, \left(b^{(r)}_j,\, \beta^{(r)}_j\right)_{1,q^{(r)}};$$

$$E_1 = \left(1 - a - M;\, \theta',\, \ldots,\, \theta^{(r)}\right),\, \left(1 - c + a - N - p;\, \delta' - \theta',\, \ldots,\, \delta^{(r)} - \theta^{(r)}\right.$$

$$\left(1 - b - M - P;\, \phi',\, \ldots,\, \phi^{(r)}\right),\, \left(1 + b - c - N;\, \delta' - \phi',\, \ldots,\, \delta^{(r)} - \phi^{(r)}\right).$$

$$\left(a_{2j};\, \alpha'_{2j},\, \alpha''_{2j}\right)_{1,p_2},\, \left(1 + d;\, \delta' - \theta' - \phi',\, \ldots,\, \delta^{(r)} - \theta^{(r)} - \phi^{(r)}\right),$$

$$\left(a_{3j};\, \alpha'_{3j},\, \alpha''_{3j}\, \alpha'''_{3j}\right)_{1,p_3};\, \ldots;\, \left(a_{rj};\, \alpha'_{rj},\, \ldots,\, \alpha^{(r)}_{rj}\right)_{1,p_r};$$

$$\left(a'_j,\, \alpha'_j\right)_{1,p'};\, \ldots;\, \left(a^{(r)}_j,\, \alpha^{(r)}_j\right)_{1,p^{(r)}};$$

$$F_1 = \left(b_{2j};\, \beta'_{2j},\, \beta''_{2j}\right)_{1,q_2},\, \left(1 - c - M - N - p;\, \delta',\, \ldots,\, \delta^{(r)}\right),$$

$$\left(d;\, \delta' - \theta' - \phi',\, \ldots,\, \delta^{(r)} - \theta^{(r)} - \phi^{(r)}\right),\, \left(b - a;\, \theta' - \phi',\, \ldots,\, \theta^{(r)} - \phi^{(r)}\right);$$

$$\left(b_{3j};\, \beta'_{3j},\, \beta''_{3j}\, \beta'''_{3j}\right)_{1,q_3};\, \ldots;\left(b_{rj};\, \beta'_{rj},\, \ldots,\, \beta^{(r)}_{rj}\right)_{1,q_r};$$

$$\left(b'_j,\, \beta'_j\right)_{1,q'};\, \ldots;\, \left(b^{(r)}_j,\, \beta^{(r)}_j\right)_{1,q^{(r)}};$$

संकलन सूत्र (5) निम्नांकित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है—

$$\delta^{(i)} > \theta^{(i)} > \phi^{(i)} > 0,\ \delta^{(i)} > \theta^{(i)} + \phi^{(i)},\ \Delta_i > 0$$

तथा

$\left| \arg z_i \right| < \frac{1}{2} \Delta_i \pi, \ \forall i \in \{1, \ldots, r\}$, जहाँ Δ_i को (4) द्वारा परिभाषित किया जाता है।

द्वितीय संकलन

$$\sum_{u=0}^{M} \sum_{v=0}^{N} \sum_{t=0}^{P} \frac{(-M)_u \, (-N)_v \, (-P)_t \, (a)_{v+t}}{u! \; v! \; t!} \times I^{0, \, n_2+3; 0, n_3; \ldots; 0, n_r; (m', n');}_{p_2+5, q_2+2; p_3, q_3; \ldots; p_r, q_r; (p', q');} \times {}^{(m'', n''); \ldots; (m^{(r)}, n^{(r)})}_{(p'', q''); \ldots; (p^{(r)}, q^{(r)})} \left[\begin{array}{c|c} z_1 & A_2 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ z_r & B_2 \end{array} \right]$$

$$= (-1)^{M+N+P} (a)_M \, I^{0, \, n_2+3; 0, n_3; \ldots; 0, n_r; (m', n');}_{p_2+5, q_2+2; p_3, q_3; \ldots; p_r, q_r; (p', q');} \times {}^{(m'', n''); \ldots; (m^{(r)}, n^{(r)})}_{(p'', q''); \ldots; (p^{(r)}, q^{(r)})} \left[\begin{array}{c|c} z_1 & E_2 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ z_r & F_2 \end{array} \right] \qquad (6)$$

जहाँ $d = a + b - c$ (पूर्णांक नहीं), तथा

$$A_2 = \left(1 - c + a - u; \delta', \ldots, \delta^{(r)}\right), \left(1 - b - v; \phi', \ldots, \phi^{(r)}\right),$$

$$\left(1 - c + b - u - t; \delta' - \phi', \ldots, \delta^{(r)} - \phi^{(r)}\right), \left(a_{2j}, \alpha'_{2j}, \alpha''_{2j}\right)_{1, p_2},$$

$$\left(1 + a - b - p + t; \phi', \ldots, \phi^{(r)}\right), \left(1 + d - N + s; \delta' - \phi', \ldots, \delta^{(r)} - \phi^{(r)}\right.$$

$$\left(a_{3j}; \alpha'_{3j}, \alpha''_{3j}, \alpha'''_{3j}\right)_{1, p_3}; \ldots; \left(a_{rj}; \alpha'_{rj}, \ldots, \alpha^{(r)}_{rj}\right)_{1, p_r};$$

$$\left(a'_j, \alpha'_j\right)_{1, p'}; \ldots; \left(a^{(r)}_j, \alpha^{(r)}_j\right)_{1, p^{(r)}};$$

$$B_2 = \left(b_{2j};\ \beta'_{2j},\ \beta''_{2j}\right)_{1,q_2},\ \left(1 - c - u - v - t;\ \delta',\ \ldots,\ \delta^{(r)}\right),$$

$$\left(d + M - u;\ \delta' - \phi',\ \ldots,\ \delta^{(r)} - \phi^{(r)}\right),\ \left(b_{3j};\ \beta'_{3j},\ \beta''_{3j};\ \beta'''_{3j}\right)_{1,q_3};$$

$$\ldots;\left(b_{rj};\ \beta'_{rj},\ \ldots,\ \beta^{(r)}_{rj}\right)_{1,q_r};\ \left(b'_j,\ \beta'_j\right)_{1,q'};\ \ldots;\ \left(b^{(r)}_j,\ \beta^{(r)}_j\right)_{1,q^{(r)}};$$

$$E_2 = \left(1 - c + a - N - P;\ \delta',\ \ldots,\ \delta^{(r)}\right),\ \left(1 - b - M - P;\ \phi',\ \ldots,\ \phi^{(r)}\right),$$

$$\left(1 + b - c - N;\ \delta' - \phi',\ \ldots,\ \delta^{(r)} - \phi^{(r)}\right),\ \left(a_{2j};\ \alpha'_{2j},\ \alpha''_{2j}\right)_{1,p_2},$$

$$\left(1 + d;\ \delta' - \phi',\ \ldots,\ \delta^{(r)} - \phi^{(r)}\right),\ \left(1 + a - b;\ \phi',\ \ldots,\ \phi^{(r)}\right),$$

$$\left(a_{3j};\ \alpha'_{3j},\ \alpha''_{3j}\ \alpha'''_{3j}\right)_{1,p_3};\ \ldots;\ \left(a_{rj};\ \alpha'_{rj},\ \ldots,\ \alpha^{(r)}_{rj}\right)_{1,p_r};$$

$$\left(a'_j,\ \alpha'_j\right)_{1,p'};\ \ldots;\ \left(a^{(r)}_j,\ \alpha^{(r)}_j\right)_{1,p^{(r)}};$$

$$F_2 = \left(b_{2j};\ \beta'_{2j},\ \beta''_{2j}\right)_{1,q_2},\ \left(1 - c - M - N - p;\ \delta',\ \ldots,\ \delta^{(r)}\right),$$

$$\left(1 + d - N;\ \delta' - \phi',\ \ldots,\ \delta^{(r)} - \phi^{(r)}\right);\ \left(b_{3j};\ \beta'_{3j},\ \beta''_{3j}\ \beta'''_{3j}\right)_{1,q_3};$$

$$\ldots;\left(b_{rj};\ \beta'_{rj},\ \ldots,\ \beta^{(r)}_{rj}\right)_{1,q_r};\ \left(b'_j,\ \beta'_j\right)_{1,q'};\ \ldots;\ \left(b^{(r)}_j,\ \beta^{(r)}_j\right)_{1,q^{(r)}};$$

(6) की वैधता की (पर्याप्त) शर्तें नीचे दी जा रही हैं–

(i) $\delta^{(i)} > \phi^{(i)} > 0,\ \forall i \in \{1,\ \ldots,\ r\}.$

(ii) $\Delta_i > 0,\ \left|\arg z_i\right| < \frac{1}{2}\Delta_i \pi, \forall i \in \{1,\ \ldots,\ r\},$

जहाँ Δ_i को (4) द्वारा परिभाषित किया जाता है।

तृतीय संकलन

$$\sum_{u=0}^{M} \sum_{v=0}^{N} \sum_{t=0}^{P} \frac{(-M)_u (-N)_v (-P)_t (b)_v}{u!\, v!\, t!}$$

$$\times I^{0,\, n_2+3;\, 0, n_3;\, \ldots;\, 0, n_r;\, (m', n');}_{p_2+4,\, q_2+3;\, p_3, q_3;\, \ldots;\, p_r, q_r;\, (p', q');}$$

$$\times \begin{matrix} (m'', n''); \ldots; (m^{(r)}, n^{(r)}) \\ (p'', q''); \ldots; (p^{(r)}, q^{(r)}) \end{matrix} \left[\begin{matrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} A_3 \\ \\ \\ \\ B_3 \end{matrix} \right]$$

$$= (-1)^{M+N+P} (b)_{M+P}\, I^{0,\, n_2+3;\, 0, n_3;\, \ldots;\, 0, n_r;\, (m', n');}_{p_2+4,\, q_2+3;\, p_3, q_3;\, \ldots;\, p_r, q_r;\, (p', q');}$$

$$\times \begin{matrix} (m'', n''); \ldots; (m^{(r)}, n^{(r)}) \\ (p'', q''); \ldots; (p^{(r)}, q^{(r)}) \end{matrix} \left[\begin{matrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E_3 \\ \\ \\ \\ F_3 \end{matrix} \right] \quad (7)$$

जहाँ $d = a + b - c$ (पूर्णांक नहीं), तथा

$$A_3 = \left(1 - a - v - t;\, \theta', \ldots, \theta^{(r)}\right), \left(1 - c + a - u;\, \delta' - \theta', \ldots, \delta^{(r)} - \theta^{(r)}\right);$$

$$\left(1 - c + b - u - t;\, \delta', \ldots, \delta^{(r)}\right), \left(a_{2j};\, \alpha'_{2j}, \alpha''_{2j}\right)_{1, p_2},$$

$$\left(1 + d - N + v;\, \delta'\, \theta', \ldots, \delta^{(r)} - \theta^{(r)}\right); \left(a_{3j}, \alpha'_{3j}, \alpha''_{3j}, \alpha'''_{3j}\right)_{1, p_3};$$

$$\ldots; \left(a_{rj};\, \alpha'_{rj}, \ldots, \alpha^{(r)}_{rj}\right)_{1, p_r}; \left(a'_j, \alpha'_j\right)_{1, p'}; \ldots; \left(a^{(r)}_j, \alpha^{(r)}_j\right)_{1, p^{(r)}};$$

$$B_3 = \left(b_{2j};\, \beta'_{2j},\, \beta''_{2j}\right)_{1,q_2},\, \left(1 - c - u - v - t;\, \delta', \ldots, \delta^{(r)}\right),$$

$$\left(d + M - u;\, \delta' - \theta', \ldots, \delta^{(r)} - \theta^{(r)}\right),\, \left(b + P - a - t;\, \theta', \ldots, \theta^{(r)}\right);$$

$$\left(b_{3j};\, \beta'_{3j},\, \beta''_{3j};\, \beta'''_{3j}\right)_{1,q_3};\, \ldots;\left(b_{rj};\, \beta'_{rj}, \ldots, \beta^{(r)}_{rj}\right)_{1,q_r};$$

$$\left(b'_j,\, \beta'_j\right)_{1,q'};\, \ldots;\, \left(b^{(r)}_j,\, \beta^{(r)}_j\right)_{1,q^{(r)}};$$

$$E_3 = \left(1 - a - M;\, \theta', \ldots, \theta^{(r)}\right),\, \left(1 - c + a - N - P;\, \delta' - \theta', \ldots, \delta^{(r)} - \theta^{(r)}\right),$$

$$\left(1 + b - c - N;\, \delta', \ldots, \delta^{(r)}\right),\, \left(a_{2j};\, \alpha'_{2j},\, \alpha''_{2j}\right)_{1,p_2},$$

$$\left(1 + d;\, \delta' - \theta', \ldots, \delta^{(r)} - \phi^{(r)}\right);\, \left(a_{3j};\, \alpha'_{3j},\, \alpha''_{3j}\, \alpha'''_{3j}\right)_{1,p_3};$$

$$\ldots;\, \left(a_{rj};\, \alpha'_{rj}, \ldots, \alpha^{(r)}_{rj}\right)_{1,p_r};\, \left(a'_j,\, \alpha'_j\right)_{1,p'};\, \ldots;\, \left(a^{(r)}_j,\, \alpha^{(r)}_j\right)_{1,p^{(r)}};$$

$$F_3 = \left(b_{2j};\, \beta'_{2j},\, \beta''_{2j}\right)_{1,q_2},\, \left(1 - c - M - N - P;\, \delta', \ldots, \delta^{(r)}\right),$$

$$\left(d;\, \delta' - \theta', \ldots, \delta^{(r)} - \theta^{(r)}\right);\, \left(b - a;\, \theta', \ldots, \theta^{(r)}\right);$$

$$\left(b_{3j};\, \beta'_{3j},\, \beta''_{3j},\, \beta'''_{3j}\right)_{1,q_3};\, \ldots;\left(b_{rj};\, \beta'_{rj}, \ldots, \beta^{(r)}_{rj}\right)_{1,q_r};$$

$$\left(b'_j,\, \beta'_j\right)_{1,q'};\, \ldots;\, \left(b^{(r)}_j,\, \beta^{(r)}_j\right)_{1,q^{(r)}}$$

संकलन सूत्र (7) निम्नांकित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है–

(i) $\delta^{(i)} > \theta^{(i)} > 0,\ \forall i \in \{1, \ldots, r\}.$

(ii) $\Delta_i > 0,\ \left|\arg z_i\right| < \frac{1}{2}\Delta_i \pi, \forall i \in \{1, \ldots, r\},$

जहाँ Δ को (4) द्वारा परिभाषित किया जाता है।

चतुर्थ संकलन

$$\sum_{u=0}^{M} \sum_{v=0}^{N} \sum_{t=0}^{P} \frac{(-M)_u \, (-N)_v \, (-P)_t \, (c-b)_{v+t} \, (c-a)_u}{u! \, v! \, t! \, (1+a-b-P)_t}$$

$$\times I^{0,\, n_2+2;\, 0, n_3;\; \ldots;\; 0, n_r;\, (m', n');}_{p_2+3,\, q_2+2;\, p_3, q_3;\; \ldots;\; p_r, q_r;\, (p', q');}$$

$$\times {}^{(m'', n'');\, \ldots;\, (m^{(r)},\, n^{(r)})}_{(p'', q'');\, \ldots;\, (p^{(r)},\, q^{(r)})} \left[\begin{matrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} A_4 \\ \\ \\ B_4 \end{matrix} \right]$$

$$= (-1)^{M+N} \frac{(c-a)_{N+P} \, (c-b)_N}{(b-a)_P}$$

$$\times I^{0,\, n_2+3;\, 0, n_3;\; \ldots;\; 0, n_r;\, (m', n');}_{p_2+3,\, q_2+2;\, p_3, q_3;\; \ldots;\; p_r, q_r;\, (p', q');}$$

$$\times {}^{(m'', n'');\, \ldots;\, (m^{(r)},\, n^{(r)})}_{(p'', q'');\, \ldots;\, (p^{(r)},\, q^{(r)})} \left[\begin{matrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E_4 \\ \\ \\ F_4 \end{matrix} \right] \qquad (8)$$

जहाँ $d = a + b - c$ (पूर्णांक नहीं),

तथा

$$A_4 = \left(1 - a - v - t;\, \delta', \ldots, \delta^{(r)}\right), \left(1 - b - v;\, \delta', \ldots, \delta^{(r)}\right);$$

$$\left(a_{2j};\, \alpha'_{2j}, \alpha''_{2j}\right)_{1, p_2}, \left(1 - d - M + u;\, \delta', \ldots, \delta^{(r)}\right);$$

$$\left(a_{3j}, \alpha'_{3j}, \alpha''_{3j}, \alpha'''_{3j}\right)_{1, p_3};\; \ldots;\; \left(a_{rj};\, \alpha'_{rj}, \ldots, \alpha^{(r)}_{rj}\right)_{1, p_r};$$

$$\left(a'_j, \alpha'_j\right)_{1, p'};\; \ldots;\; \left(a^{(r)}_j, \alpha^{(r)}_j\right)_{1, p^{(r)}};$$

$$B_4 = \left(b_{2j};\, \beta'_{2j},\, \beta''_{2j}\right)_{1,q_2},\, \left(1 - c - u - v - t;\, \delta',\, \ldots,\, \delta^{(r)}\right),$$

$$\left(-d + N - v;\, \delta',\, \ldots,\, \delta^{(r)}\right);\, \left(b_{3j};\, \beta'_{3j},\, \beta''_{3j};\, \beta'''_{3j}\right)_{1,q_3};\, \ldots;$$

$$\left(b_{rj};\, \beta'_{rj},\, \ldots,\, \beta^{(r)}_{rj}\right)_{1,q_r};\, \left(b'_j,\, \beta'_j\right)_{1,q'};\, \ldots;\, \left(b^{(r)}_j,\, \beta^{(r)}_j\right)_{1,q^{(r)}};$$

$$E_4 = \left(1 - a - M;\, \delta',\, \ldots,\, \delta^{(r)}\right),\, \left(1 - b - M - p;\, \delta',\, \ldots,\, \delta^{(r)}\right),$$

$$\left(a_{2j};\, \alpha'_{2j},\, \alpha''_{2j}\right)_{1,p_2},\, \left(1 + d;\, \delta',\, \ldots,\, \delta^{(r)}\right);$$

$$\left(a_{3j};\, \alpha'_{3j},\, \alpha''_{3j}\, \alpha'''_{3j}\right)_{1,p_3};\, \ldots;\, \left(a_{rj};\, \alpha'_{rj},\, \ldots,\, \alpha^{(r)}_{rj}\right)_{1,p_r};$$

$$\left(a'_j,\, \alpha'_j\right)_{1,p'};\, \ldots;\, \left(a^{(r)}_j,\, \alpha^{(r)}_j\right)_{1,p^{(r)}};$$

$$F_4 = \left(b_{2j};\, \beta'_{2j},\, \beta''_{2j}\right)_{1,q_2},\, \left(1 - c - M - N - P;\, \delta',\, \ldots,\, \delta^{(r)}\right),$$

$$\left(-d;\, \delta',\, \ldots,\, \delta^{(r)}\right);\, \left(b_{3j};\, \beta'_{3j},\, \beta''_{3j},\, \beta'''_{3j}\right)_{1,q_3};\, \ldots;$$

$$\left(b_{rj};\, \beta'_{rj},\, \ldots,\, \beta^{(r)}_{rj}\right)_{1,q_r};\, \left(b'_j,\, \beta'_j\right)_{1,q'};\, \ldots;\, \left(b^{(r)}_j,\, \beta^{(r)}_j\right)_{1,q^{(r)}}$$

संकलन सूत्र (8) निम्नांकित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है–

$$\delta^{(i)} > 0,\ \Delta_i > 0,\ \left|\arg z_i\right| < \frac{1}{2}\Delta_i \pi,\ \ \forall i \in \{1, \ldots, r\},$$

जहाँ Δ_i को (4) द्वारा परिभाषित किया जाता है।

$$B_4 = \left(b_{2j};\ \beta'_{2j},\ \beta''_{2j}\right)_{1,q_2},\ \left(1 - c - u - v - t;\ \delta',\ \ldots,\ \delta^{(r)}\right),$$

$$\left(-d + N - v;\ \delta',\ \ldots,\ \delta^{(r)}\right);\ \left(b_{3j};\ \beta'_{3j},\ \beta''_{3j};\ \beta'''_{3j}\right)_{1,q_3};\ \ldots;$$

$$\left(b_{rj};\ \beta'_{rj},\ \ldots,\ \beta^{(r)}_{rj}\right)_{1,q_r};\ \left(b'_j,\ \beta'_j\right)_{1,q'};\ \ldots;\ \left(b^{(r)}_j,\ \beta^{(r)}_j\right)_{1,q^{(r)}};$$

$$E_4 = \left(1 - a - M;\ \delta',\ \ldots,\ \delta^{(r)}\right),\ \left(1 - b - M - p;\ \delta',\ \ldots,\ \delta^{(r)}\right),$$

$$\left(a_{2j};\ \alpha'_{2j},\ \alpha''_{2j}\right)_{1,p_2},\ \left(1 + d;\ \delta',\ \ldots,\ \delta^{(r)}\right);$$

$$\left(a_{3j};\ \alpha'_{3j},\ \alpha''_{3j}\ \alpha'''_{3j}\right)_{1,p_3};\ \ \ldots;\ \left(a_{rj};\ \alpha'_{rj},\ \ldots,\ \alpha^{(r)}_{rj}\right)_{1,p_r};$$

$$\left(a'_j,\ \alpha'_j\right)_{1,p'};\ \ldots;\ \left(a^{(r)}_j,\ \alpha^{(r)}_j\right)_{1,p^{(r)}};$$

$$F_4 = \left(b_{2j};\ \beta'_{2j},\ \beta''_{2j}\right)_{1,q_2},\ \left(1 - c - M - N - P;\ \delta',\ \ldots,\ \delta^{(r)}\right),$$

$$\left(-d;\ \delta',\ \ldots,\ \delta^{(r)}\right);\ \left(b_{3j};\ \beta'_{3j},\ \beta''_{3j},\ \beta'''_{3j}\right)_{1,q_3};\ \ldots;$$

$$\left(b_{rj};\ \beta'_{rj},\ \ldots,\ \beta^{(r)}_{rj}\right)_{1,q_r};\ \left(b'_j,\ \beta'_j\right)_{1,q'};\ \ldots;\ \left(b^{(r)}_j,\ \beta^{(r)}_j\right)_{1,q^{(r)}}$$

संकलन सूत्र (8) निम्नांकित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है–

$$\delta^{(i)} > 0,\ \Delta_i > 0,\ \left|\arg z_i\right| < \frac{1}{2}\Delta_i \pi,\ \ \forall i \in \{1,\ \ldots,\ r\},$$

जहाँ Δ_i को (4) द्वारा परिभाषित किया जाता है।

प्रथम संकलन की उपपत्ति

(5) के वाम पक्ष के बहुचरीय I-फलन को उसके बहुगुणित मेलिन कंटूर समाकल (1) के रूप में व्यक्त करने, समाकलन तथा संकलन का क्रम बदलने (जो वैध है) तथा आन्तरिक त्रिक सान्त श्रेणी का निम्नलिखित ज्ञात परिणाम (प्रधान[3]) की सहायता से मूल्यांकन करने पर :

$$\sum_{u=0}^{M}\sum_{v=0}^{N}\sum_{t=0}^{P}\frac{(-M)_u\,(-N)_v\,(-P)_t\,(a)_{v+t}\,(c-a)_u\,(c-b)_{u+t}\,(b)_v}{u!\,v!\,t!\,(c)_{u+v+t}(1-d-N)_u(1+d-N)_v(1+a-b-P)_t}$$

$$=\frac{(a)_M\,(c-a)_{N+P}\,(b)_{M+P}\,(c-b)_N}{(-d)_N\,(d)_M\,(b-a)_P\,(c)_{M+N+P}},\ a+b-c=d\ (\text{पूर्णांक नहीं})$$

(5) के दाहिने पक्ष को (1) की सहायता से प्राप्त परिणाम की व्याख्या से प्राप्त किया जाता है।

इसी तरह (6) से लेकर (8) तक के संकलन सूत्रों को सिद्ध किया जा सकता है।

विशिष्ट दशाएँ

(5) से (8) के सूत्रों में $n_2 = n_3 = \ldots = n_{r-1} = 0 = P_2 = P_3 = \ldots = P_{r-1}$ एवं $q_2 = q_3 = \ldots = q_{r-1} = 0$ रखने पर हमें श्रीवास्तव तथा पंडा[6] के उस बहुचरीय फलन के लिए त्रिगुण श्रेणी सम्बन्ध मिलता है जिसे बोहरा, गोयल तथा जैन[1] पहले दे चुके हैं।

निर्देश

1. बोहरा, आर० सी०, गोयल, एस० पी० तथा जैन, यू० सी० : Indian Journal of Mathematics, 1968, 30 (1), 41.
2. मथाई, ए० एम०, तथा सक्सेना, आर० के० : The H-function with Applications in Statistics and Other Disciplines, जान विले एण्ड सन्स, न्यूयार्क, (1978).
3. प्रधान, के० एम०: Math. Education, 1976, 10 A, 33.
4. प्रसाद, वाई० एन०, **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका**, 1986, 29, 231.
5. श्रीवास्तव, एच० एम० इत्यादि : The H-Function of One and Two Variables with Applications, साउथ एशियन पब्लिशर्स, नई दिल्ली (1982)
6. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा पंडा आर०: J. Reine Angew. Math., 1976, 288, 129.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 44, No. 2, April 2001.

मल-जल सिंचित मृदा में भारी धातुओं का वितरण

शिवगोपाल मिश्र तथा दिनेश मणि

शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—जनवरी 3, 2001]

सारांश

विगत दो दशकों से अधिक समय से मल-जल से सिंचित शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान के प्रायोगिक प्रक्षेत्र में पाँच प्रमुख भारी धातुओं यथा— कैडमियम, क्रोमियम, कॉपर, लेड तथा जिंक का परिच्छेदिका की गहराई के अनुसार वितरण संबंधी अध्ययन किया गया। यह पाया गया कि जिंक को छोड़कर सभी चार भारी धातुओं का एकत्रण ऊपरी सतह एवं अधोसतह (0-10 एवं 10-20 से०मी० गहराई तक) पर अधिक होता है। इससे अधिक की गहराई (20-30 से० मी०) पर भी कभी-कभी भारी धातुओं का अधिक सांद्रण देखने को मिल जाता है किंतु 30-40 से० मी० या इससे अधिक गहराई पर भारी धातुओं का सांद्रण क्रमशः कम ही पाया गया। वितरण का यह क्रम भारी धातुओं के कुल सांद्रण एवं डी० टी० पी० ए० निष्कर्षित सांद्रण दोनों में लगभग एक-सा ही पाया गया।

Abstract

Distribution of heavy metals in sewage irrigated soils. *By* S. G. Misra and Dinesh Mani, Sheila Dhar Institute of Soil Science, University of Allahabad, Allahabad.

A profilewise distribution pattern of five chief pollutants viz. Cd, Cr, Cu, Pb and Zn was studied in experimental farm of Sheila Dhar Institute of Soil Science, which is being irrigated with domestic sewage water (containing detergents, cosmetics etc.) for the last two decades. It was observed that except zinc almost all the four heavy metals accumulated much more on surface and sub-surface layers (0-10 and 10-20 cm. depth) than other lower layers. Sometimes at 20-30 cm depth, these heavy metals accumulate at higher concentration but at 30-40 cm depth or beyond, the concentration of heavy metals was observed in

least amounts. The distribution pattern was almost alike in both total and DTPA extractable concentration of heavy metals.

आजकल शहरों के आसपास की भूमि पर जो खेती की जा रही है उसमें शहरों के नालों में बह रहे घरेलू तथा औद्योगिक अपशिष्टों से युक्त गंदे पानी (जिसे मलजल या सीवेज कहा जाता है) से सिंचाई की जाती है। अब तक हुए शोधों से यह भलीभांति ज्ञात हो चुका है कि मलजल व आपंक में नाइट्रोजन, फास्फोरस, कार्बनिक पदार्थ के अतिरिक्त कुछ भारी धातुएं भी पाई जाती हैं जो मिट्टी में एकत्रित होने पर मृदा के धात्विक प्रदूषण का कारण बनती हैं। साथ ही पौधों द्वारा इनके उद्ग्रहीत किये जाने पर उनकी वृद्धि तथा उपज पर बुरा प्रभाव डालती हैं।[1]

मलज़ल से सिंचित मृदा में गहराई के अनुसार इन भारी धातुओं यथा— कैडमियम, क्रोमियम, कॉपर, लैड तथा जिंक इत्यादि का एकत्रीकरण होता रहता है। यह एकत्रीकरण मृदा में विद्यमान कार्बनिक पदार्थ की मात्रा, कैल्शियम की मात्रा, पी० एच० मान तथा धनायन विनिमय क्षमता जैसे कई भौतिक रासायनिक गुणों पर निर्भर करता है। मिश्र तथा मणि[2] के द्वारा शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान इलाहाबाद के प्रायोगिक प्रक्षेत्र पर किए गए प्रयोगों द्वारा यह निष्कर्ष निकला है कि यहाँ उपलब्ध मलज़ल तथा आपंक में भारी धातुओं की सान्द्रता अधिकतम अनुमेय स्तर से अधिक नहीं है किन्तु भविष्य में लगातार सिंचाई करते रहने से मृदा तथा फसलों में भारी धातुओं का संचय हो सकता है।

मृदा की परिच्छेदिका के अनुसार इन भारी धातुओं के वितरण का विस्तृत अध्ययन अत्यंत समीचीन है क्योंकि इससे हमें मृदा के धात्विक प्रदूषण की सही-सही वस्तुस्थिति का ज्ञान होता है और हम यथोचित मृदा सुधारक मिलाकर मृदा के धात्विक प्रदूषण को कम कर सकते हैं। दूसरी ओर हम यथोचित फसलों का चयन करके उपयोगी फसल-चक्र अपनाकर इन भारी धातुओं की विषाक्तता से बच सकते हैं।

प्रयोगात्मक

शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान, इलाहाबाद के प्रायोगिक प्रक्षेत्र की सिंचाई विगत दो दशकों से भी अधिक समय से घरेलू मलजल (जिसमें साबुन, डिटरजेंट तथा प्रसाधन सामग्री की अधिकता रहती है) से की जा रही है। इस प्रायोगिक प्रक्षेत्र से 0-10, 10-20, 20-30 एवं 30-40 सेमी० की गहराई से मृदा नमूने लिए गए। प्रयोगशाला में लाने के पश्चात् इन मृदा नमूनों को छाया में सुखाकर बारीक पीसकर 2 मिमी० की चलनी से छानकर इनके निष्कर्ष तैयार किए गए।

मिट्टी में भारी धातुओं के कुल सांद्रण को ज्ञात करने के लिए द्वि-अम्ल (Di-acid) निष्कर्ष तथा डी० टी० पी० ए० निष्कर्षित सांद्रण के लिए डी० टी० पी० ए० निष्कर्ष तैयार करके एटामिक एब्जार्प्शन स्पेक्ट्रोफोटोमीटर, (Model PYE UNICAM SP 2900 coupled with SP 9 computer) की सहायता से भारी धातुओं की मात्रा ज्ञात की गई।

सभी परिणाम सारणी 1-4 तक दर्शाए गए हैं। चित्र सं० 1-5 तक मलजल सिंचित मृदा में भारी धातुओं का वितरण दर्शाया गया है।

परिणाम तथा विवेचना

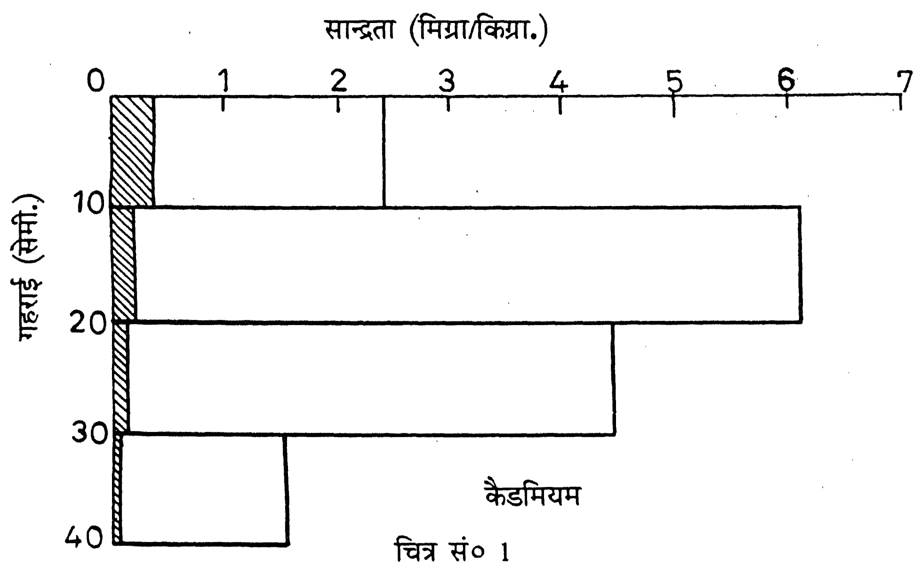
कैडमियम : शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान के प्रायोगिक प्रक्षेत्र की सामान्य मृदा की तुलना में मलजल सिंचित मृदा में कुल कैडमियम सदैव अधिक पाया गया। मलजल सिंचित मृदा में कुल कैडमियम की मात्रा 1.6-6.2 मि० ग्रा०/कि० ग्रा० तक पाई गई जबकि सामान्य मृदा में यह मात्रा 0.5-1.8 मि० ग्रा०/कि० ग्रा० थी। डी० टी० पी० ए० निष्कर्षित कैडमियम की मात्रा भी सामान्य मृदा की तुलना में मलजल सिंचित मृदा में अधिक पाई गई। एण्डरसन[3] तथा ल्यूट्रिक[4] ने भी मलजल सिंचित तथा आपंक प्रयुक्त मृदा में ऐसे ही परिणाम प्राप्त किए।

क्रोमियम : सामान्य मृदा की तुलना में कुल क्रोमियम का वितरण मलजल सिंचित मृदा में अधिक पाया गया। कुल क्रोमियम की मात्रा मलजल सिंचित मृदा में 2.6-4.9 मि० ग्रा०/कि० ग्रा० तक पाई गई जबकि सामान्य मृदा में यह मात्रा 0.5-1.4 मि० ग्रा०/कि० ग्रा० तक थी। डी० टी० पी० ए० निष्कर्षित क्रोमियम की मात्रा भी गहराई बढ़ने के साथ कम पाई गई।

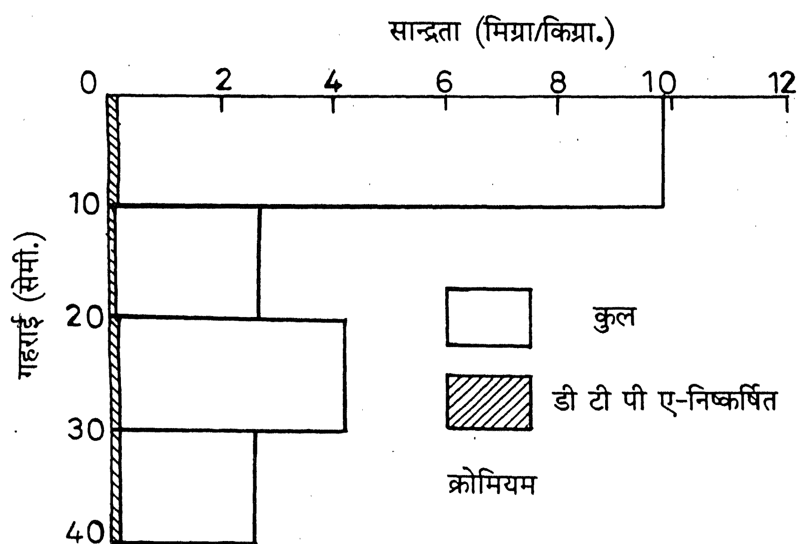
कॉपर : मलजल सिंचित मृदा में कुल कॉपर की मात्रा 25-46 मि० ग्रा०//कि० ग्रा० तक पाई गई। डी० टी० पी० ए० निष्कर्षित कॉपर की मात्रा 1.0-3.2 मि० ग्रा०/ कि० ग्रा० तक प्रेक्षित की गई। लीपर[5] ने भी मलजल सिंचित मृदा की ऊपरी सतह पर कॉपर की अधिक मात्रा का संचय पाया और बताया कि यह मृदा में अधिक मात्रा में कॉपर युक्त मलजल एवं आपंक (सीवेज-जल) के अत्यधिक प्रयोग का प्रतिफल है।

लेड : मलजल सिंचित मृदा में लैड की अधिकांश मात्रा कैडमियम, क्रोमियम तथा कॉपर की ही तरह मृदा की ऊपरी सतह पर ही संचित पाई गई। मलजल सिंचित मृदा में कुल लेड की मात्रा 1.9-4.6 मि०ग्रा०/कि० ग्रा० तक पाई गई। सामान्य मृदा में यह मात्रा 0.40-1.10 मि० ग्रा०/कि०ग्रा० थी। डी० टी० पी० ए० निष्कर्षित लेड की मलजल सिंचित एवं सामान्य मृदाओं में गहराई के अनुसार कम प्रेक्षित किया गया।

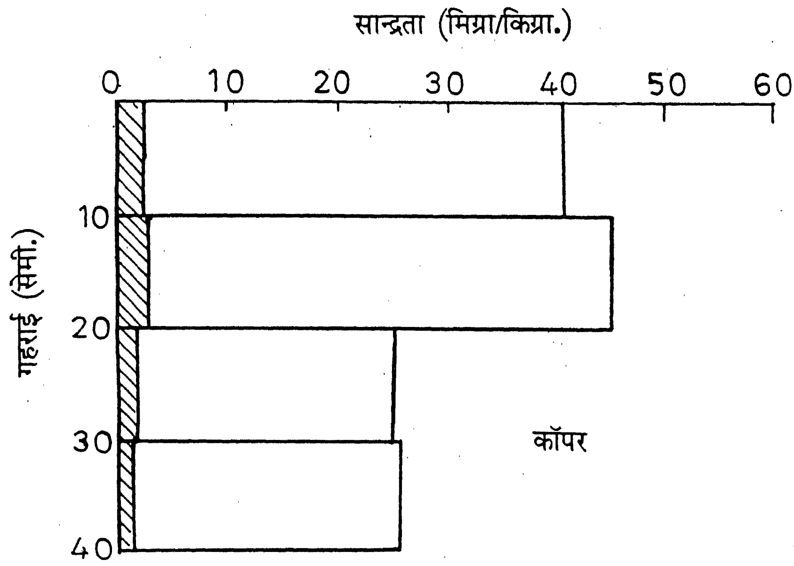
जिंक : कुल जिंक के मामले में मलजल सिंचित मृदा एवं सामान्य मृदा में बहुत अधिक अन्तर नहीं परिलक्षित हुआ किंतु डी० टी० पी० ए० निष्कर्षित जिंक की मात्रा मलजल सिंचित मृदा में सामान्य मृदा की तुलना में लगभग तीन गुना अधिक पाई गई। जिंक की यह अधिकता मलजल के संगठन में ही जिंक की अधिक मात्रा का होना माना जा सकता है। मलजल सिंचित मृदा में कुल जिंक की मात्रा 109-150 मि० ग्रा०/कि० ग्रा० तक पाई गई। डेविश[6] ने अपने अध्ययन में इस बात की पुष्टि की है कि उपलब्ध जिंक प्रदूषित मृदा में 15-50 सेमी० की गहराई तक कम पाया गया। उसके बाद गहराई के अनुसार धीरे-धीरे इसकी मात्रा में कमी आती है।



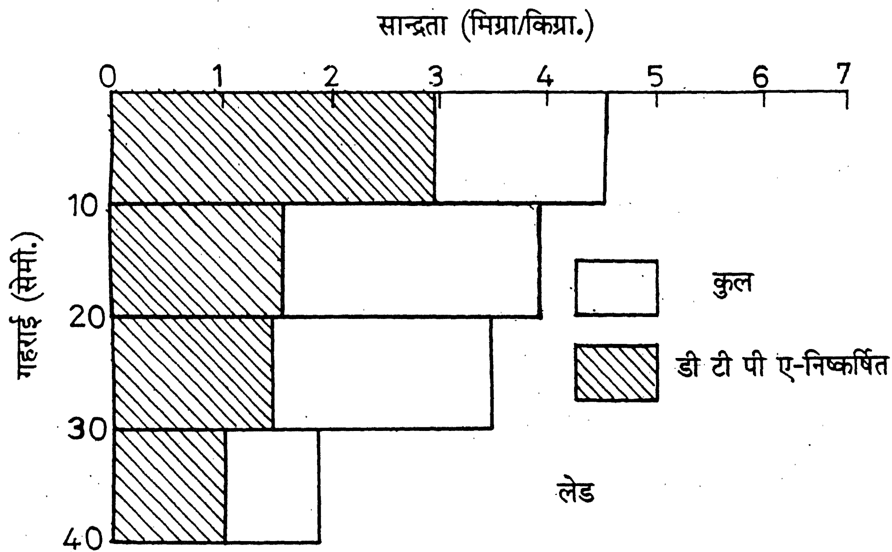
चित्र सं० 1



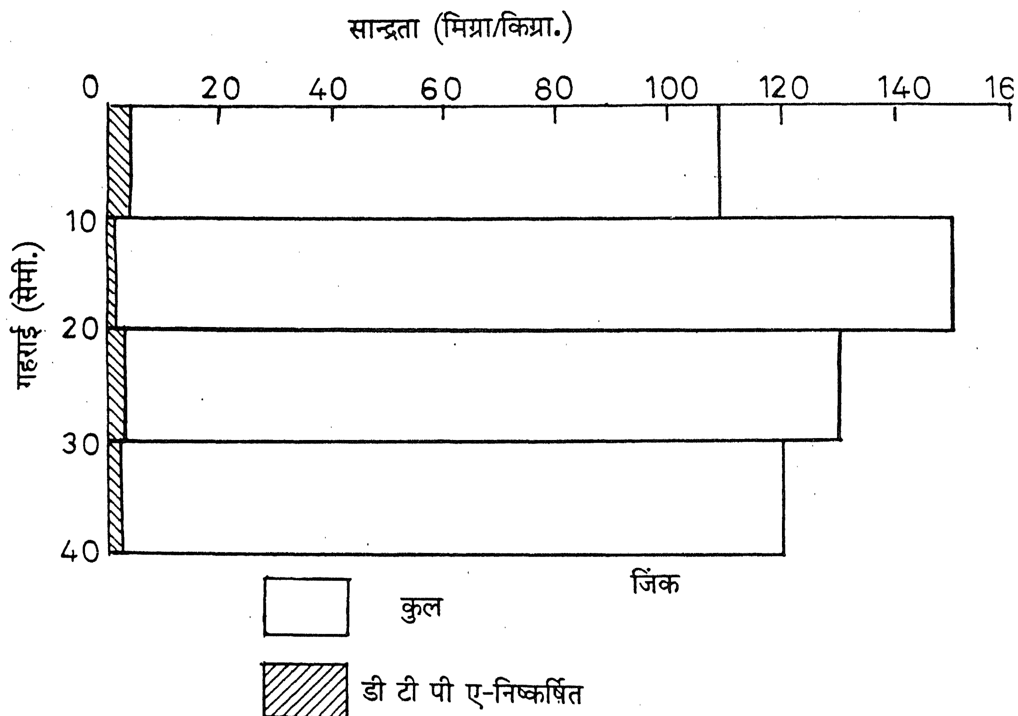
चित्र सं० 2 : शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान के प्रायोगिक प्रक्षेत्र की मलजल सिंचित मृदा में क्रोमियम का वितरण



चित्र सं० 3



चित्र सं० 4 : शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान के प्रायोगिक प्रक्षेत्र की मलजल सिंचित मृदा में लेड का वितरण



चित्र सं० 5 : शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान के प्रायोगिक प्रक्षेत्र की मलजल सिंचित मृदा में जिंक का वितरण

सारणी 1

शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान के प्रायोगिक प्रक्षेत्र पर उपलब्ध मलजल में भारी धातुओं की सान्द्रता

भारी धातु	सान्द्रता (पी०पी०एम० में)
कैडमियम	0.60
क्रोमियम	0.54
कॉपर	3.50
लेड	1.50
जिंक	7.60

सारणी 2 : शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान के प्रायोगिक प्रक्षेत्र की मलजल सिंचित मृदा के भौतिक-रासायनिक गुण

पी० एच०	...	7.8
विद्युत चालकता (d Sm-1) at 25°C	...	0.16
आर्गेनिक कार्बन	...	0.98%
कुल नाइट्रोजन	...	0.08%
घनायन विनिमय क्षमता (C mol (P+) Kg-1)	...	19.5%
कुल फास्फेट	...	0.08%
डी. टी. पी. ए. कैडमियम	...	0.46 पी० पी० एम०
" क्रोमियम	...	0.32 "
" कॉपर	...	1.4 "
" लैड	...	0.34 "
" जिंक	...	4.40 "

सारणी 3 : शीलाधर मृदाविज्ञान संस्थान के प्रायोगिक प्रक्षेत्र की सामान्य मृदा में भारी धातुओं का वितरण (मि० ग्रा०/कि० ग्रा०)

भारी धातु		मृदा की गहराई (सेमी० में)			
		0-10	10-20	20-30	30-40
कैडमियम	कुल :	1.8	0.64	1.2	0.50
	डी टी पी ए-निष्कर्षित :	0.04	0.12	0.03	0.02
क्रोमियम	कुल :	1.4	0.9	0.6	0.5
	डी टी पी ए-निष्कर्षित :	0.07	0.01	0.03	0.03
कॉपर	कुल :	37	42	34	41
	डी टी पी ए-निष्कर्षित :	0.24	3.4	—	-
लेड	कुल :	1.10	0.90	0.60	0.40
	डी टी पी ए-निष्कर्षित :	0.85	0.36	0.20	0.09
जिंक	कुल :	106	115	130	110
	डी टी पी ए-निष्कर्षित :	0.14	0.28	0.18	0.12

इन परिणामों से यह निष्कर्ष निकलता है कि जिंक को छोड़कर शेष चारों धातुएँ यथा कैडमियम, क्रोमियम, कॉपर तथा लेड परिच्छेदिका की ऊपरी सतह पर अधिक एकत्र होती हैं। इन भारी धातुओं का एकत्रीकरण 30 सेमी० की गहराई तक अधिक रहता है।

सारणी 4 : शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान के प्रायोगिक प्रक्षेत्र की मलजल सिंचित मृदा में भारी धातुओं का वितरण (मि० ग्रा०/कि० ग्रा०)

भारी धातु		मृदा की गहराई (सेमी० में)			
		0-10	10-20	20-30	30-40
कैडमियम	कुल :	2.4	6.2	4.4	1.6
	डी टी पी ए-निष्कर्षित :	0.32	0.16	0.14	0.10
क्रोमियम	कुल :	4.9	2.7	4.2	2.6
	डी टी पी ए-निष्कर्षित :	0.10	0.09	0.10	0.10
कॉपर	कुल :	42	46	25	26
	डी टी पी ए-निष्कर्षित :	2.4	3.2	1.0	1.2
लेड	कुल :	4.6	3.8	3.4	1.8
	डी टी पी ए-निष्कर्षित :	2.9	1.6	1.4	1.0
जिंक	कुल :	109	190	130	120
	डी टी पी ए-निष्कर्षित :	2.24	1.04	1.40	1.82

इस प्रकार हल की गहराई तक इन भारी धातुओं के एकत्रीकरण की अधिक संभावना को देखते हुए मृदा के धात्विक प्रदूषण को कम करने के अविलम्ब प्रयास करने की आवश्यकता है।

निर्देश

1. मिश्र, एस० जी० तथा दिनेश मणि : विज्ञान परिषद अनुसंधान पत्रिका, 1991, 34, 83-90.
2. मिश्र, एस० जी० तथा दिनेश मणि : विज्ञान परिषद अनुसंधान पत्रिका, 1990, 33, 193-199.
3. एण्डरसन, ए० : Swed. J. Agric. Res., 1976, 6, 27-36.
4. ल्यूट्रिक, एम० सी०, बर्टेण्ड, जे० ई० तथा ब्रूलेण्ड, एच० एल० : Soil and Crop Sci. Soc., Florida 1976, 35 : 101-106.
5. लीपर, जी० डब्लू० : Managing the Heavy Metals on Land, Dekker, New York, 1978.
6. डेविश, आर० डी० : Plants in Soils. Plant & Soil. 1976, 49, 395.

लेखकों से निवेदन

- विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हैं और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका को होना चाहिये।
- लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।
- अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये पाँच रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।
- लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे K_4FeCN_6 अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।
- ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।
- प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिए । अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सके।
- प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।
- लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायेंगे। पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume)और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से

  फॉवेल, आर० आर० तथा म्युलर, जे०, जाइट फिजिक० केमि०, 1928, **150**, 80
- प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) एक सौ रुपये मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।
- लेख "सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2"इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबन्ध सम्पादक

मूल्य
वार्षिक मूल्य : 100 **रु० या** 20 **पौंड या** 50 **डालर**
त्रैमासिक मूल्य : 25 **रु० या** 6 **पौंड या** 10 **डालर**

Rates
Annual Rs. : 100 or 20 £ or $ 50
Per. Vol. Rs.: 25 or 6 £ or $ 10

प्रकाशक :
विज्ञान परिषद् प्रयाग
महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-२

Vijnana Parishad Prayag
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad-2 (India)

मुद्रक : कम्प्यूटर कम्पोजर्स
7, बेली एवेन्यू, इलाहाबाद
फोन : 640854, 640405

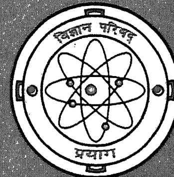
44 July 2001 No.3

ISSN : 0505-5806

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

The Research Journal of the Hindi Science Academy

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika



विज्ञान परिषद् प्रयाग

महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-211002

कौंसिल ऑफ साइंस एण्ड टेक्नालॉजी, उत्तर प्रदेश तथा कौंसिल ऑफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च, नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित

विषय-सूची

Vol. 44 July 2001 No.3

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 44, No. 3, July 2001.

समय आश्रित ह्रास तथा माँग के लिए निर्धारक उत्पादन मालसूची

पी० एन० गुप्ता तथा आर० एन० अग्रवाल
गणित तथा सांख्यिकी विभाग, जैनारायण व्यास विश्वविद्यालय, जोधपुर (राज०)

[प्राप्त – दिसम्बर 22, 2000]

सारांश

इस प्रपत्र में उत्पादन माल सूची माडल पर विचार किया गया है जिसमें माँग की रैखिक प्रवृत्ति है, उत्पादन स्वयं माँग के समानुपाती है। इस अध्ययन में उत्पाद का समय आश्रित ह्रास सम्मिलित है, इसमें कमियों की छूट दी गई है और कमी की अवधि में माँग संचित होती है। विभिन्न निहित मात्राओं के लिए सन्निकट हल प्राप्त किये गये हैं और उनके अधिकतम मान परिगणित किये गये हैं। इस विधि की प्रभावात्मकता दिखाने के उद्देश्य से एक सांख्यिकीय उदाहरण भी दिया गया है।

Abstract

A deterministic production inventory model for time dependent deterioration and demand. *By* P. N. Gupta and R. N. Agarwal, Department of Mathematics and Statistics, J. N. V. University, Jodhpur (Raj.).

This paper deals with a production inventory model consisting of a linear trend of demand, the production being proportional to the demand itself. The study includes time dependent deterioration of the product, allows for the shortages and the demand during the period of shortage is accumulated. Approximate solutions are obtained for the various quantities involved and their optimal values are calculated. A numerical example is taken to illustrate the effectiveness of the method.

प्रस्तावना

माल सूची की समस्याओं का अध्ययन करने के लिए पहले से अनेक मॉडल विकसित किये जा चुके हैं। किन्तु प्रारम्भ में किसी ने उत्पाद ह्रास से विषय में कोई परवाह नहीं की। ह्रास के प्रभाव पर विचार

किये बिना तथा माँग और उत्पादन के बीच किसी प्रकार का सम्बन्ध जाने बिना मॉडलों को विकसित किया गया। किन्तु वास्तविकता तो यह है कि ये दोनों बातें अति महत्वपूर्ण हैं। ह्रास की धारणा का उल्लेख किटिन[14] ने किया जिसमें संग्रह अवधि के अंत में सामानों के ह्रास पर विचार किया। घारे तथा श्रेडर[5] ने सर्वप्रथम मालसूचियों पर क्षय के प्रभाव की ओर संकेत किया। बाद में कोवर्ट तथा फिलिप[3], मिश्रा[10], शाह तथा जायसवाल[11], गोयल तथा अग्रवाल[6], मंडल तथा फौजदार[9] इत्यादि ने विभिन्न ह्रास दरों के साथ माल सूची माडलों का अध्ययन किया। दत्ता तथा पाल[4] ने माँग शक्ति पैटर्न का अध्ययन किया जबकि गोस्वामी तथा चौधरी[7], भूमा तथा मैती[1] एवं बोस इत्यादि[2] ने माँग की रैखिक प्रवृत्ति का अध्ययन किया। उर्बान[13] ने माल सूची स्तर-आश्रित माँग दर पर विचार किया। होलियर तथा मैक[8] ने घटती माँग के सथ मालसूची प्रतिपूर्ति नीतियों को विकसित किया। भूमिया तथा मैती[1] ने उत्पादन दर को हाथ में आई मालसूची के अनुसार परिवर्तनशील (exponential) माना। सु इत्यादि[12] ने कमी को छूट देकर तथा घटती माँग को अधिक्रमी मानते हुए माडल का विस्तार किया। इस अध्ययन में हमने समय पर सीधे आश्रित ह्रास को लिया है। उत्पादन की दर माँग के समानुपाती हैं और माँग समय का सरल फलन है। कमियों को छूट दी गई है और माँग के पिछले संग्रह की अनुमति दी गई है। मॉडल का विश्लेषण कतिपय सन्निकटीकरणों सहित किया गया है और इष्टतम मात्राओं की गणना की गई है। अन्त में अध्ययन किये गये मॉडल को दृष्टान्त रूप में एक सांख्यिकीय उदाहरण द्वारा प्रस्तुत किया गया है।

कल्पनाएं तथा संकेतन

माल सूची मॉडल को निम्नांकित कल्पनाओं तथा संकेतनों के आधार पर विकसित किया जाता है–

1. मांग दर की कल्पना $D(t) = a + bt$ के रूप में $t \geq 0$, a तथा b अचर हैं, $a > 0, b < 1$
2. उत्पादन दर $P(t) = kD(t)$ है जहाँ $k(> 1)$ अचर है तथा $P(t) > D(t)$
3. ह्रास $= \beta t$ है जिसमें β अचर है और अत्यन्त लघु है
4. I (t) = माल सूची स्तर, समय $t \geq 0$ पर
5. S = अधिकतम मालसूची स्तर
6. Z = अपूरित आदेश
7. C = प्रत्येक नवीन चक्र के लिए स्थापन लागत
8. d_c = प्रति इकाई प्रति इकाई समय ह्रास लागत
9. h_c = प्रति इकाई प्रति इकाई समय माल सूचीवाहक लागत
10. S_c = प्रति इकाई प्रति इकाई समय कमी लागत
11. d_c = चक्र समय $= t_1 + t_2 + t_3 + t_4$

12. K = तन्त्र का कुल औसत मूल्य

गणितीय सूचीकरण तथा हल

किसी समय t पर माल सूची स्तर I (t) की तत्कालिक दशा निम्नांकित अवकल समीकरणों द्वारा नियन्त्रित होती है–

$$\frac{dI(t)}{dt} = P(t) - D(t) - \beta t \, . \, I(t), \quad 0 \le t \le t_1 \tag{1}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = -D(t) - \beta t \, . \, I(t), \quad 0 \le t \le t_2 \tag{2}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = -D(t), \quad 0 \le t \le t_3 \tag{3}$$

तथा

$$\frac{dI(t)}{dt} = P(t) - D(t), \quad 0 \le t \le t_4 \tag{4}$$

प्रारम्भ में भंडार स्तर शून्य है। उत्पादन तो $t = 0$ के बाद शुरू होता है और $t = t_1$ तक चालू रहता है। ज्योंही भंडार स्तर S हो जाता है, उत्पादन बन्द हो जाता है। तब माँग तथा ह्रास दोनों के ही कारण माल सूची स्तर घटता जाता है जब तक कि $t = t_2$ पर यह पुनः शून्य नहीं हो जाता। t_2 समय के बाद कमी शुरू होती है और $t = t_3$ समय तक संचित होती रहती है। इस बिन्दु पर उत्पादन पुनः शुरू होता है और $t = t_4$ चालू रहता है, जब कि सम्पूर्ण पिछला संग्रह निपट नहीं जाता है और पुनः शून्य नहीं हो जाता। हमारा उद्देश्य S, Z, K, t_1, t_2 t_3 तथा t_4 के इष्टतम मान ज्ञात करना है। ह्रास की तीव्रता अत्यन्त निम्न होती है किन्तु समय के साथ बढ़ती है। फिर भी $t >> 1$ के लिए यह परिबद्ध रहती है। P (t) तथा D (t) के मानों का उपयोग करने पर चारों समीकरण (1), (2) (3) तथा (4) निम्नांकित रूप धारण करते हैं–

$$\frac{dI(t)}{dt} + \beta(t) \, . \, I(t) = (k-1)(a+bt), \quad 0 \le t \le t_1 \tag{5}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} + \beta(t) \, . \, I(t) = -(a+bt), \quad 0 \le t \le t_2 \tag{6}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = -(a+bt), \quad 0 \le t \le t_3 \tag{7}$$

तथा

$$\frac{dI(t)}{dt} = (k-1)(a+bt), \quad 0 \le t \le t_4 \tag{8}$$

समीकरण (5) का हल है–

$$I(t)\,e^{\frac{\beta t^2}{2}} = \int (k-1)(a+bt)\,e^{\frac{\beta t^2}{2}}\,dt + c$$

β के द्वितीय तथा उच्चस्तर घातों की उपेक्षा करके तथा अवकलन करने पर सरलीकरण के बाद हमें प्राप्त होता है–

$$I(t) = (k-1)\left[at + \frac{bt^2}{2} - \frac{a\beta t^3}{3} - \frac{b\,\beta t^4}{8}\right] + c\left(1 - \frac{\beta t^2}{2}\right)$$

$I(t) = 0$ जब $t = 0$ अतः $c = 0$ इस प्रकार

$$I(t) = (k-1)\left[at + \frac{bt^2}{2} - \frac{a\beta t^3}{3} - \frac{b\,\beta t^4}{8}\right] \qquad 0 \le t \le t_1 \tag{9}$$

$t = t_1$ **पर** $I(t) = S$, अतः

$$S = (k-1)\left[at_1 + \frac{bt_1^2}{2} - \frac{a\beta t_1^3}{3} - \frac{b\,\beta t_1^4}{8}\right] \tag{10}$$

समीकरण **(6)** के हल से

$$I(t)\left(1 + \frac{\beta t^2}{2}\right) = -\int (a+bt)\left(1 + \frac{\beta t^2}{2}\right) + c'$$

प्राप्त होता है। सरलीकरण के बाद

$$I(t) = -\left[at + \frac{bt^2}{2} - \frac{a\beta t^3}{3} - \frac{b\,\beta t^4}{8}\right] + c'\left(1 - \frac{\beta t^2}{2}\right)$$

चूँकि $t = t2$ के लिए $I(t) = 0$

$$\therefore \quad c' = \left[at_2 + \frac{bt_2^2}{2} - \frac{a\beta t_2^3}{3} - \frac{b\,\beta t_2^4}{8}\right]$$

अतः

$$I(t) = -\left[at + \frac{bt^2}{2} - \frac{a\beta t^3}{3} - \frac{b\,\beta t^4}{8}\right] + \left[at_2 + \frac{bt_2^2}{2} - \frac{a\beta t_2^3}{3} - \frac{b\,\beta t_2^4}{8} - \frac{a\,\beta t_2\,t^2}{3} - \frac{b\,\beta t_2^2\,t^2}{4}\right]$$

$$0 \le t \le t_2 \tag{11}$$

$t = 0$ के लिए $I(t) = S$

$$\therefore \quad S = at_2 + \frac{bt_2^2}{2} - \frac{a\beta t_2^3}{3} - \frac{b\,\beta t_2^4}{8} \tag{12}$$

$t = 0$ के लिए शर्त $I(t) = 0$ से समीकरण (7) के हल से प्राप्त होता है

$$I(t) = -\left(at + \frac{bt^2}{2}\right) \qquad 0 \le t \le t_3 \tag{13}$$

$t = t_3$ पर

$$I(t) = -Z = -\left(at_3 + \frac{bt_3^2}{2}\right) \tag{14}$$

समीकरण **(8)** से

$$I(t) = (k-1)\left(at + \frac{bt^2}{2}\right) + c''$$

$t = t_4$ पर $I(t) = 0$ का प्रयोग करने पर

$$I(t) = (k-1)\left[at + \frac{bt^2}{2} - at_4 - \frac{bt_4^2}{2}\right], \qquad 0 \le t \le t_4 \tag{15}$$

पुनः $t = 0$ के लिए $I(t) = -Z$

$$\therefore \quad Z = (k-1)\left(at_4 + \frac{bt_4^2}{2}\right) \tag{16}$$

समीकरण (10) तथा (12) से t_1 तथा t_2 के मध्य जो सम्बन्ध प्राप्त होता है वह इस प्रकार है–

$$(k-1)\left(at_1 + \frac{bt_1^2}{2} - \frac{a\beta t_1^3}{3} - \frac{b\,\beta t_1^4}{8}\right) = at_2 + \frac{bt_2^2}{2} - \frac{a\beta t_2^3}{3} - \frac{b\,\beta t_2^4}{8} \tag{17}$$

समीकरण (14) तथा (16) से t_3 तथा t_4 के मध्य जो सम्बन्ध है वह इस प्रकार है

$$\left(at_3 + \frac{bt_3^2}{2}\right) = (k-1)\left(at_4 + \frac{bt_4^2}{2}\right) \tag{18}$$

अवधि (O, T) के लिए ह्रास लागत है–

$$= d_c\left[\int_0^{t_1} \beta t\,.\,I(t)\,dt + \int_0^{t_2} \beta t\,.\,I(t)\,dt\right]$$

$$= d_c\left[\int_0^{t_1} \beta t\,.\,(k-1)\left[at + \frac{bt^2}{2} - \frac{a\beta t^3}{3} - \frac{b\,\beta t^4}{8}\right]dt\right.$$

$$+ \int_0^{t_2} \beta t\left[-\left(at + \frac{bt^2}{2} - \frac{a\beta t^3}{3} - \frac{b\,\beta t^4}{8}\right)\right.$$

$$\left.\left.+\left(at_2 + \frac{bt_2^2}{2} - \frac{a\beta t_2^3}{3} - \frac{b\,\beta t_2^4}{8} - \frac{a\,\beta t_2\,t^2}{2} - \frac{b\,\beta t_2^2\,t^2}{4}\right)\right]dt\right]$$

$$= d_c\left[\int_0^{t_1} (k-1)\left[a\beta t^2 + \frac{b\,\beta t^3}{2}\right]dt + \int_0^{t_2}\left(-a\beta t^2 - \frac{b\,\beta t^3}{2} + a\beta t_2 t - \frac{b\,\beta t - t_2^2}{2}\right)dt\right]$$

$$= \beta d_c\left[(k-1)\left(\frac{a\,t_1^3}{3} + \frac{b\,t_1^4}{8}\right) + \left(\frac{a\,t_2^3}{6} - \frac{3b\,t_2^4}{8}\right)\right] \qquad (19)$$

अवधि (O, T) तक के लिए माल सूचीवाहक लागत है–

$$= h_c\left[\int_0^{t_1} I(t)\,dt + \int_0^{t_2} I(t)\,dt\right]$$

$$= h_c\left[\int_0^{t_1} (k-1)\left[at + \frac{bt^2}{2} - \frac{a\,\beta t^3}{3} - \frac{b\,\beta t^4}{8}\right]dt \quad \int_0^{t_2}\left[-\left(at + \frac{bt^2}{2} - \frac{a\beta t^3}{3} - \frac{b\,\beta t^4}{8}\right)\right.\right.$$

$$\left.+\left(at_2 + \frac{bt_2^2}{2} - \frac{a\beta t_2^3}{3} - \frac{b\,\beta t_2^4}{8} - \frac{a\,\beta t_2\,t^2}{2} - \frac{b\,\beta t_2^2\,t^2}{4}\right)\right]dt$$

$$= h_c\left[(k-1)\left(\frac{a\,bt_1^2}{2} + \frac{b\,t_1^3}{6} - \frac{a\,\beta t_1^4}{12} - \frac{b\,\beta t_1^5}{40}\right)\right.$$

$$+ \left(\frac{a\,t_2^2}{2} + \frac{b\,t_2^3}{3} - \frac{5a\,\beta t_2^4}{12} - \frac{11b\,\beta t_2^5}{60} \right) \Bigg] \tag{20}$$

अवधि (O, T) के लिए कमी लागत है–

$$= S_c \left[-\left\{ \int_0^{t_3} I(t)\,dt + \int_0^{t_4} I(t)\,dt \right\} \right]$$

$$= S_c \left[\int_0^{t_3} \left(at + \frac{bt^2}{2} \right) dt + (k-1) \int_0^{t_4} \left(-at - \frac{bt^2}{2} + at^4 + \frac{bt_4^2}{2} \right) dt \right]$$

$$= S_c \left[\left(\frac{a\,t_3^2}{2} + \frac{b\,t_3^3}{6} \right) + (k-1) \left(\frac{a\,t_4^2}{2} + \frac{b\,t_4^3}{3} \right) \right] \tag{21}$$

अतः माल सूची तंत्र के लिए कुल औसत लागत है–

K = स्थापन लागत + ह्रास लागत + माल सूची वाहक लागत + कमी लागत

$$= \frac{C}{T} + \frac{\beta d_c}{T} \left[(k-1) \left(\frac{a\,t_1^3}{3} + \frac{b\,t_1^4}{8} \right) + \left(\frac{a\,t_2^3}{6} + \frac{3b\,t_2^4}{8} \right) \right]$$

$$+ \frac{h_c}{T} \Bigg[(k-1) \left(\frac{a\,t_1^2}{2} + \frac{b\,t_1^3}{6} - \frac{a\,\beta t_1^4}{12} - \frac{b\,\beta t_1^5}{40} \right)$$

$$+ \left(\frac{a\,t_2^2}{2} + \frac{b\,t_2^3}{3} - \frac{5a\,\beta t_2^4}{12} - \frac{11b\,\beta t_2^5}{60} \right) \Bigg]$$

$$= \frac{S_c}{T} \left[\left(\frac{a\,t_3^2}{2} + \frac{b\,t_3^3}{6} \right) + (k-1) \left(\frac{a\,t_4^2}{2} + \frac{b\,t_4^3}{3} \right) \right] \tag{22}$$

लागत फलन K के मान के इष्टतम मान के लिए

$$\frac{\partial K}{\partial t_1} = 0 \quad \text{तथा} \quad \frac{\partial K}{\partial t_4} = 0$$

T के $t_1 + t_2 + t_3 + t_4$ से प्रतिस्थापित किया जा सकता है और K को t तथा t_4 फलन के रूप में क्रमशः (17) एवं (18) समीकरणों से t_2 के मान को t_3 के पदों के रूप में तथा t_3 को t_4 के पदों के रूप में प्रतिस्थापित करने के बाद लिखा जा सकता है–

चूँकि $T = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$

$$\frac{\partial T}{\partial t_1} = 1 + \frac{dt_2}{dt_1} \quad \text{तथा} \quad \frac{\partial T}{\partial t_4} = 1 + \frac{dt_3}{dt_4} \tag{23}$$

t_1 तथा t_2 के सापेक्ष K को अंशतः अवकलित करने पर

$$\frac{\partial K}{\partial t_1} = -\frac{C}{T^2}\left(1 + \frac{dt_2}{dt_1}\right) - \frac{\beta d_c}{T^2}$$

$$\times \left[(k-1)\left(\frac{a\,t_1^3}{3} + \frac{b\,t_1^4}{8}\right) + \left(\frac{a\,t_2^3}{6} + \frac{3b\,t_2^4}{8}\right)\right] \times \left(1 + \frac{dt_2}{dt_1}\right)$$

$$+ \frac{\beta d_c}{T}\left[(k-1)\left(a\,t_1^2 + \frac{b\,t_1^3}{2}\right) + \left(\frac{a\,t_2^2}{2} + \frac{3b\,t_2^3}{2}\right)\frac{dt_2}{dt_1}\right]$$

$$- \frac{h_c}{T^2}\left[(k-1)\left(\frac{a\,t_1^2}{2} + \frac{b\,t_1^3}{6} - \frac{a\,\beta t_1^4}{12} - \frac{b\,\beta t_1^5}{40}\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{a\,t_2^2}{2} + \frac{b\,t_2^3}{3} - \frac{5a\,\beta t_2^4}{12} - \frac{11b\,\beta t_2^5}{60}\right)\right] \times \left(1 + \frac{dt_2}{dt_1}\right)$$

$$+ \frac{h_c}{T}\left[(k-1)\left(a\,t_1 + \frac{bt_1^3}{2} - \frac{a\,\beta t_1^3}{3} - \frac{b\,\beta t_1^4}{8}\right)\right.$$

$$+\left(a t_2 + b t_2^2 - \frac{5a\beta t_2^3}{3} - \frac{11b\beta t_2^4}{12}\right)\frac{dt_2}{dt_1}\Bigg] \qquad (24)$$

$$\frac{\partial K}{\partial t_4} = -\frac{C}{T^2}\left(1 + \frac{dt_3}{dt_4}\right) - \frac{\beta d_c}{T^2}$$

$$\times\left[(k-1)\left(\frac{a t_1^3}{3} + \frac{b t_1^4}{8}\right) + \left(\frac{a t_2^3}{6} + \frac{3b t_2^4}{8}\right)\right] \times \left(1 + \frac{dt_3}{dt_4}\right)$$

$$-\frac{h_c}{T^2}\Bigg[(k-1)\left(\frac{a t_1^2}{2} + \frac{b t_1^3}{6} - \frac{a\beta t_1^4}{12} - \frac{b\beta t_1^5}{40}\right)$$

$$+\left(\frac{a t_2^2}{2} + \frac{b t_2^3}{3} - \frac{5a\beta t_2^4}{12} - \frac{11b\beta t_2^5}{60}\right)\Bigg] \times \left(1 + \frac{dt_3}{dt_4}\right)$$

$$-\frac{S_c}{T^2}\left[\left(\frac{a t_3^2}{2} + \frac{b t_3^3}{6}\right) + (k-1)\left(\frac{a t_4^2}{2} + \frac{b t_4^3}{3}\right)\right]\left(1 + \frac{dt_3}{dt_4}\right)$$

$$+\frac{S_c}{T}\left[\left(a t_3 + \frac{b t_3^2}{2}\right)\frac{dt_3}{dt_4} + (k-1)\left(a t_4 + b t_4^2\right)\right] \qquad (25)$$

अब समीकरण (17) से

$$(k-1)\left(a + bt_1 - a\beta t_1^2 - \frac{b\beta t_1^3}{2}\right) = \left(a + bt_2 - a\beta t_2^2 - \frac{b\beta t_2^3}{2}\right)\frac{dt_2}{dt_1}$$

$$\therefore \quad \frac{dt_2}{dt_1} = \frac{(k-1)\left(a + bt_1 - a\beta t_1^2 - \frac{b\beta t_1^3}{2}\right)}{\left(a + bt_2 - a\beta t_2^2 - \frac{b\beta t_2^3}{2}\right)} \qquad (26)$$

तथा समीकरण (18) से

$$\left(a + bt_3\right)\frac{dt_3}{dt_4} = (k-1)\left(a + bt_4\right)$$

अथवा
$$\frac{dt_3}{dt_4} = \frac{(k-1)\left(a + bt_4\right)}{\left(a + bt_3\right)} \tag{27}$$

$\frac{\partial K}{\partial t_1}$ अथवा $\frac{\partial K}{\partial t_4}$ को शून्य रखने पर हमें निम्नांकित दो समीकरण प्राप्त होते हैं–

$$-\frac{C}{T^2}\left(1 + \frac{dt_2}{dt_1}\right) - \frac{\beta d_c}{T^2} \times \left[(k-1)\left(\frac{a\,t_1^3}{3} + \frac{b\,t_1^4}{8}\right) + \left(\frac{a\,t_2^3}{6} + \frac{3b\,t_2^4}{8}\right)\right] \times \left(1 + \frac{dt_2}{dt_1}\right)$$

$$+ \frac{\beta d_c}{T}\left[(k-1)\left(a\,t_1^2 + \frac{b\,t_1^3}{2}\right) + \left(\frac{a\,t_2^2}{2} + \frac{3b\,t_2^3}{2}\right)\frac{dt_2}{dt_1}\right]$$

$$-\frac{h_c}{T^2}\left[(k-1)\left(\frac{a\,t_1^2}{2} + \frac{b\,t_1^3}{6} - \frac{a\,\beta t_1^4}{12} - \frac{b\,\beta t_1^5}{40}\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{a\,t_2^2}{2} + \frac{b\,t_2^3}{3} - \frac{5a\,\beta t_2^4}{12} - \frac{11b\,\beta t_2^5}{60}\right)\right] \times \left(1 + \frac{dt_2}{dt_1}\right)$$

$$+ \frac{h_c}{T}\left[(k-1)\left(a\,t_1 + \frac{bt_1^3}{2} - \frac{a\,\beta t_1^3}{3} - \frac{b\,\beta t_1^4}{8}\right)\right.$$

$$\left. + \left(a\,t_2 + b\,t_2^2 - \frac{5a\,\beta t_2^3}{3} - \frac{11b\,\beta t_2^4}{12}\right)\frac{dt_2}{dt_1}\right] = 0 \tag{28}$$

$$-\frac{C}{T^2}\left(1+\frac{dt_3}{dt_4}\right)-\frac{\beta d_c}{T^2}\left[(k-1)\left(\frac{a\,t_1^3}{3}+\frac{b\,t_1^4}{8}\right)+\left(\frac{a\,t_2^3}{6}+\frac{3b\,t_2^4}{8}\right)\right]\times\left(1+\frac{dt_3}{dt_4}\right)$$

$$-\frac{h_c}{T^2}\left[(k-1)\left(\frac{a\,t_1^2}{2}+\frac{b\,t_1^3}{6}-\frac{a\,\beta t_1^4}{12}-\frac{b\,\beta t_1^5}{40}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{a\,t_2^2}{2}+\frac{b\,t_2^3}{3}-\frac{5a\,\beta t_2^4}{12}-\frac{11b\,\beta t_2^5}{60}\right)\right]\times\left(1+\frac{dt_3}{dt_4}\right)$$

$$-\frac{S_c}{T^2}\left[\left(\frac{a\,t_3^2}{2}+\frac{b\,t_3^3}{6}\right)+(k-1)\left(\frac{a\,t_4^2}{2}+\frac{b\,t_4^3}{3}\right)\right]\left(1+\frac{dt_3}{dt_4}\right)$$

$$+\frac{S_c}{T}\left[\left(a\,t_3+\frac{b\,t_3^2}{2}\right)\frac{dt_3}{dt_4}+(k-1)\left(at_4+b\,t_4^2\right)\right]=0 \qquad (29)$$

(26) तथा (27) से $\frac{dt_2}{dt_1}$ एवं $\frac{dt_3}{dt_4}$ के मानों को (28) तथा (29) में प्रतिस्थापित करते हैं और तब ये (17) तथा (18) समीकरणों सहित t_1, t_2, t_3 तथा t_4 के इष्टतम मानों के लिए हल किये जा सकते हैं । तब (21) से K का इष्टतम मान परिगणित किया जा सकत है। S, Z तथा अवधि T के इष्टतम मानों को भी परिगणित किया जा सकता है।

एक उदाहरण

मॉडल में आये विभिन्न प्राचलों के प्रभाव को दिखलाने के लिए एक सांख्यिक उदाहरण हल किया गया है। प्राचलों के मूल्यों के विभिन्न संयोग लिये गये हैं। प्राप्त परिणाम सारणीबद्ध हैं। यह सारणी बतलाती है क कुल औसत मूल्य *k, a, b* तथा β प्राचलों में वृद्धि के साथ बढ़ते हैं। आशानुरूप यह औसत लागत भी धारण लागत के साथ ही मूल्य में वृद्धि के साथ बढ़ता है।

निष्कर्ष

प्रस्तुत अध्ययन एक समय आश्रित माँग तथा ह्रास के साथ माल सूची मॉडल उपस्थित करता है। ह्रास दर प्राचल β, मांग दर प्राचल **a**, तथा **b** एवं उत्पादन प्राचल का कुल औसत लागत पर प्रभाव का परीक्षण करने के लिए मॉडल को न्यूटन-रैफ्सन विधि के द्वारा सिद्ध किया गया है। तद्नुसार यह मॉडल प्राचल **b** एवं β की अपेक्षा प्राचल **a** तथा **k** के प्रति अधिक संवेदनशील हो गया है। यह भी पाया जाता है कि स्थापन लागत के साथ साथ वाहक लागत में वृद्धि से कुल औसत लागत ह्रास लागत या कमी

लागत की तुलना में अधिक तेजी से बढ़ती है। आगे का अध्ययन (syochastic) माँग तथा उत्पादन दरों के साथ हाथ में लिया जा सकता है।

सारणी 1

प्रणाली के कुल औसत मूल्य K पर a, b, k, β तथा विभिन्न मूल्यों का प्रभाव

a	b	C	k	β	S_c	h_c	d_c	K
200	.2	105	2.00	.005	10.0	1.00	3.00	153.910999
250	.2	105	2.00	.005	10.0	1.00	3.00	171.655043
300	.2	105	2.00	.005	10.0	1.00	3.00	189.399086
250	.2	105	2.00	.005	10.0	1.00	3.00	171.655043
250	.4	105	2.00	.005	10.0	1.00	3.00	171.663276
250	.6	105	2.00	.005	10.0	1.00	3.00	171.671509
250	.2	105	2.00	.005	10.0	1.00	3.00	171.655043
250	.2	125	2.00	.005	10.0	1.00	3.00	187.432890
250	.2	150	2.00	.005	10.0	1.00	3.00	207.155200
250	.2	105	2.00	.005	10.0	1.00	3.00	171.655043
250	.2	105	2.50	.005	10.0	1.00	3.00	197.982086
250	.2	105	3.00	.005	10.0	1.00	3.00	224.309129
250	.2	105	2.00	.002	10.0	1.00	3.00	171.653671
250	.2	105	2.00	.005	10.0	1.00	3.00	171.655043
250	.2	105	2.00	.010	10.0	1.00	3.00	171.657329
250	.2	105	2.00	.005	05.0	1.00	3.00	169.189803
250	.2	105	2.00	.005	10.0	1.00	3.00	171.655043
250	.2	105	2.00	.005	15.0	1.00	3.00	174.120282
250	.2	105	2.00	.005	10.0	0.50	3.00	138.045890
250	.2	105	2.00	.005	10.0	1.00	3.00	171.655043
250	.2	105	2.00	.005	10.0	1.50	3.00	205.264195
250	.2	105	2.00	.005	10.0	1.00	3.00	171.655043
250	.2	105	2.00	.005	10.0	1.00	6.00	171.670820
250	.2	105	2.00	.005	10.0	1.00	9.00	171.678709

निर्देश

1. भुनिया, ए० के० तथा मैती, एम० : J. Opl. Res. Soc. 1997, 48, 221-224.
2. बोस, एस०, गोस्वामी ए० तथा चौधरी, के० एस० : J. Opl. Res. Soc, 1995, 46, 771-782.
3. कोवर्ट, आर० पी० तथा फिलिप, जी० सी० : AIIE. Trans. 1973, 5, 323-326.
4. दत्ता, टी० के० तथा पाल, ए० के० : Indian J. Pure Appl. Math. 1987, 19 (11), 1043-1053.
5. घारे, पी० एम० तथा श्रेडर, जी० एफ० : J. Ind. Engg. 1963, 14, 238-243.
6. गोयल, वी० पी० तथा अग्रवाल, एस० पी० : Proc. All India Seminar on O. R. and Decision Making, University of Delhi, Delhi, 1981, 19-34.
7. गोस्वामी, ए० तथा चौधरी, के० एस० : J. Opl. Res. Soc. 1991, 42, 1105-1110.
8. होलियर, आर० एच० तथा मैक, के० एल० : Int. J. Prod Res. 1983, 21, 813-826.
9. मंडल, बी० एन० तथा फौजदार, एस० : J. Opl. Res. Soc. 1989, 40, 483-488.
10. मिश्रा, आर० बी० : Int. J. Prod. Res. 1975, 13,495-505.
11. शाह, वाई० के० तथा जायसवाल, एम० सी० : Opsearch, 1997, 14, 174-184.
12. सु, चाओ-तान, चेंज-वैंग लिन तथा चिह-हुंगत्साई : Opsearch, 1999, 36, (2), 95-106.
13. उर्बन, टी० एल० : J. Opl. Res. Soc. 1992, 43, 721-724.
14. व्हिटिन, टी० एम० : The Theory of Inventory Management, Princeton University Press, N. J. 1957, 62-72

पारिभाषिक शब्दावली

पिछला संग्रह Backlog
ह्रास लागत Deterioration Cost
माल तन्त्र Inventory System
उत्पादन Production
कमी लागत Shortage Cost
माँग Demand
धारण लागत Holding Cost
भंडार स्तर Stock level
स्थापन लागत Setup Cost
मालसूची वाहक लागत Inventory Carrying Cost

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 44, No. 3, July 2001.

उष्मा स्रोत/अभिगम तथा अनुप्रस्थ चुम्बकीय क्षेत्र की उपस्थिति में एक ऊर्ध्वपट्टिका में से अपरिवर्ती मुक्त संवहन प्रवाह

एस. एस. ताक तथा रोहित कुमार गहलौत
गणित तथा सांख्यिकी विभाग, जैनारायण व्यास विश्वविद्यालय, जोधपुर (राजस्थान)

[प्राप्त — सितम्बर 10, 2000]

सारांश

एकसमान अनुप्रस्थ चुम्बकीय क्षेत्र तथा उष्मा स्रोत/अभिगम की उपस्थिति में अर्ध-अपरिमित ऊर्ध्व पट्टिका में से होकर अपरिवर्ती मुक्त संवहन प्रवाह के लिए उष्मा तथा संवेग स्थानान्तरण का अध्ययन किया गया है।

Abstract

Steady free convection flow along a vertical plate in presence of heat source sink and transverse magnetic field. *By* S. S. Tak and Rohit Kumar Gehlot, Mathematics and Statistics Department, Jai Narian Vyas University, Jodhpur (Rajasthan).

Heat and momentum transfer in case of steady free convection flow along a semi-infinite vertical plate in presence of uniform transverse magnetic field and heat source/sink have been investigated. The governing boundary layer equations have been solved by taking series expansion of the stream function and temperature function. The resulting ordinary non-linear coupled differential equations with the boundary conditions have been solved numerically on computer, using shooting technique. Velocity functions and temperature functions are shown graphically. Numerical values of functions which correspond to local wall shear stress and the rate of surface heat transfer are tabulated. The effects of magnetic field, Prandtl number and heat source/sink parameter on skin friction and surface heat transfer have been discussed.

एक अर्ध अपरिमित समतापी ऊर्ध्व पट्टिका में से होकर तरलों के मुक्त संवहन प्रवाह का अध्ययन सर्वप्रथम पोहलासन[1] ने प्रस्तुत किया, जिन्होंने इस निर्मेय को संवेग समाकल विधि से हल किया। ओस्ट्राच[2] ने इसी निर्मेय को साम्य विधि से हल किया। तरल को वायु माना गया। बाद में अर्ध अपरिमित पट्टिका में से मुक्त संवहन का अध्ययन अनेक लेखकों ने विभिन्न भौतिक परिस्थितियों के अन्तर्गत विस्तार से किया।[3-13]

प्रस्तुत निर्मेय में उष्मा स्रोत/अभिगम तथा अनुप्रस्थ स्थिर चुम्बकीय क्षेत्र की उपस्थिति में अर्ध अपरिमित ऊर्ध्व पट्टिका में मुक्त संवहन सीमान्त स्तर प्रवाह में उष्मा तथा संवेग स्थानान्तरण का अध्ययन किया गया है।

निर्मेय का सूत्रीकरण

एक अनुप्रस्थ चुम्बकीय क्षेत्र तथा उष्मास्रोत/अधिगम की उपस्थिति में स्थिर ताप T'_w पर अर्ध अपरिमित ऊर्ध्वपट्टिका से होकर असंपीड्य वैद्युततः चालक तरल के अपरिवर्ती मुक्त प्रवाह पर विचार करें। पट्टिका से काफी दूरी पर तरल का ताप T'_∞ है। x' -अक्ष पट्टिका में ऊपर की दिशा में लिया गया तथा y' -अक्ष इसके लम्बवत् हैं। समस्त तरल गुणों को स्थिर मान लिया गया है। ताप के साथ घनत्व विचरण को पिंड बल के रूप में माना गया है। चूंकि तरल का वेग निम्न है अतः श्यान क्षयी ऊर्जा को नगण्य माना गया है। यही नहीं, ऊर्ध्व पट्टिका के लम्बवत् स्थिर चुम्बकीय क्षेत्र व्यवहृत किया जाता है और तरल की विद्युच्चालकता को अल्प मान लिया गया है इसलिए प्रेरित चुम्बकीय क्षेत्र को व्यवहृत चुम्बकीय क्षेत्र की तुलना में उपेक्षणीय माना जा सकता है। तब पूर्ववत् बूसिनेस्क के सन्निकटनों के अन्तर्गत अपरिवर्ती संवहन प्रवाह उष्मा स्रोत/अभिगम की उपस्थिति में निम्नांकित सीमान्त समीकरणों (स्पैरो[12]) के द्वारा अनुशासित होता है।

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0, \qquad (1)$$

$$u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial v'}{\partial y'} = \nu'\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \beta g(T' - T'_\infty) - \frac{\sigma B^2 u'}{\rho}, \qquad (2)$$

$$u'\frac{\partial T'}{\partial x'} + v'\frac{\partial T'}{\partial y'} = \alpha\frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2} + \frac{S'}{\rho c_p}(T' - T'_\infty), \qquad (3)$$

जहाँ

$S'(T' - T'_\infty)$ प्रति इकाई समय में प्रति इकाई आयतन से उत्पन्न या क्षयित उष्मा है जो $S' > 0$ उष्मा स्रोत या $S' < 0$ उष्मा अधिगम के अनुसार है, u' तथा v' वेग घटक हैं जो क्रमशः x', y' अक्षों पर है, ν शुद्ध गतिक श्यानता है, ρ घनत्व है, σ विद्युचालकता है, g गुरुत्व त्वरण है, α उष्मीय विसरणशीलता है, β उष्मीय प्रसार का गुणांक है तथा B प्रयुक्त चुम्बकीय क्षेत्र है।

सीमान्त प्रतिबन्ध निम्नवत् हैं

$$\left.\begin{array}{ll} y' = 0 \text{ पर} & u' = 0, \quad v' = 0, \quad T = T_w, \\ \text{ज्यों ज्यों } y' \to \infty, & u' \to 0, \quad T \to T_\infty \end{array}\right\} \quad (4)$$

निम्नांकित अविम राशियों को सन्निविष्ट करने पर

$$x = \frac{x'}{L}, \qquad y = y'\sqrt{\frac{U}{Lv}},$$

$$u = \frac{u'}{U}, \qquad v = v'\sqrt{\frac{L}{Uv}},$$

तथा

$$\theta = \frac{T' - T'_\infty}{T'_w - T'_\infty},$$

जहाँ L पट्टिका की प्ररूपी लम्बाई है तथा

$U = \sqrt{g\beta L(T_w - T_\infty)}$, चाल की विमासहित राशि है। (1) से (3) तक के समीकरण निम्नांकित अविम रहित रूप में बदल जाते हैं।

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \theta - Mu, \quad (6)$$

$$u\frac{\partial \theta}{\partial x} + v\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr}\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + S\theta, \quad (7)$$

जहाँ

$M = \frac{\sigma L\beta^2}{\rho U}$ (चुम्बकीय क्षेत्र प्राचल)

$Pr = \frac{\mu c_p}{\kappa}$ (प्रेंडल अंक)

$S = \frac{S'L}{U\rho c_p}$ (विमारहित उष्मा स्रोत/अभिगम प्राचल)

निम्नांकित साम्य चरों को परिभाषित किया गया है

$$\psi = x^{3/4} f(\eta, \xi), \qquad \eta = x^{-1/4} y,$$
$$\xi = x^{1/2}, \qquad \theta = \theta(\eta, \xi), \tag{8}$$

जहाँ ψ प्रवाही फलन ऐसा है कि

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{9}$$

(8) तथा (9) का उपयोग करने पर यह दिखाया जा सकता है कि

$$\left.\begin{aligned} u &= \xi f', \\ v &= -\frac{x^{-1/4}}{4}\left(3f - \eta f' + 2\xi\frac{\partial f}{\partial \xi}\right), \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

तथा समीकरण (6) व (7)

$$f''' + \tfrac{3}{4} f f' - \tfrac{1}{2} f'^2 + \frac{\xi}{2}\left(f''\frac{\partial f}{\partial \xi} - f'\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\, \partial \eta}\right) - M\xi f' + \theta = 0, \tag{11}$$

एवं

$$\theta''' + \tfrac{3}{4} Pr f \theta' + \frac{\xi Pr}{2}\left(\theta'\frac{\partial f}{\partial \xi} - f'\frac{\partial \theta}{\partial \xi}\right) + Pr\, S\, \xi\, \theta = 0. \tag{12}$$

में समाहित हो जाते हैं जहाँ अभाज्य से η के प्रति अवकलन दर्शाया गया है।

सीमांत प्रतिबन्धों (4) को निम्नवत् लिखा जा सकता है

$$\left.\begin{aligned} &\eta = 0 \quad \text{पर} \quad f = 0, \quad f' = 0, \quad \theta = 1, \\ \text{ज्यों ज्यों} \quad &\eta \to \infty: \quad f' \to 0, \quad \theta \to 0 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

यहाँ पर ध्यान देने योग्य है कि साम्य हल समीकरण (11) तथा (12) में चुम्बकीय क्षेत्र पद की उपस्थिति तथा उष्मा स्रोत/अधिगम के कारण सम्भव नहीं हैं भले ही हम f तथा θ को ε से स्वतन्त्र क्यों न मान लें। किसी भी चुम्बकीय क्षेत्र प्राचल M को परिवर्तनशील (ε के व्युत्क्रमानुपाती) तथा उष्मा स्रोत/अभिगम प्राचल को 0 मानते हुये, साम्य हल प्राप्त किये गये हैं।[4-7] प्रस्तुत दशा में M तथा S को अचर मान लिया गया है। अतः हम (11) तथा (12) के लिए हल की श्रृंखला खोजते हैं जो निम्नवत् सीमांत प्रतिबन्धों (13) के अन्तर्गत है।

$$\left.\begin{aligned} f &= f_0(\eta) + \xi f_1(\eta) + \xi^2 f_2(\eta) + \ldots \\ \theta &= \theta_0(\eta) + \xi\theta_1(\eta) + \xi^2\theta_2(\eta) + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

जहाँ $\xi << 1$, चूँकि $\xi = \sqrt{\frac{x'}{L}}$ तथा L अर्ध अपरिमित पट्टिका की लम्बाई है।

समीकरण (11) तथा (12) में (14) को रखने तथा ε के समान घातों के गुणांकों को समतुल्य करने पर सामान्य अवकल समीकरणों का निम्नलिखित तन्त्र प्राप्त होता है

$$f_0''' + \frac{3}{4} f_0 f_0'' - \frac{1}{2} f_0'^2 + \theta_0 = 0, \quad (16)$$

$$\theta_0'' + \frac{3}{4} Pr f_0 \theta_0' = 0, \quad (17)$$

$$f_1''' + \frac{3}{4} f_1'' f_0' - \frac{3}{2} f_1' f_0' + \frac{5}{4} f_1' f_0'' - M f_0' + \theta_0 = 0, \quad (18)$$

$$\theta_1''' + \frac{3}{4} Pr\, \theta_1' f_0 + (2S - f_0') \frac{Pr}{2} \theta_1 + \frac{5}{4} Pr\, \theta_0' f_1 = 0, \quad (19)$$

जिसके साथ सीमान्त प्रतिबन्ध हैं

$$\left.\begin{aligned} &\eta = 0 \quad \text{पर} \quad f_0 = 0 = f_1 = f_0' = f_1' = 0 \quad \theta_0 = 1, \quad \theta_1 = 0, \\ &\text{ज्यों ज्यों} \quad \eta \to \infty : \quad f_0' \to 0, \quad f_1' \to 0, \quad \theta_0 \to 0 \quad \theta_1 \to 0 \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

(16) से लेकर (19) तक के समीकरण अरैखिक युग्मिता सीमांत मान निर्मेय के रूप में हैं जो दो सीमान्तों पर संस्तुत हैं, और जिनका वैश्लेषिक हल सम्भव नहीं है। इसलिए इन समीकरणों को कम्प्यूटर के द्वारा हल किया गया है और 0.01 चरण आकार के साथ चतुर्थ कोटिक रुंगे-कट्टा समाकलन स्कीम सहित न्यूटन की प्ररोही विधि का इस्तेमाल किया गया है। यह विधि दो सीमान्तों के लिये संस्तुत सामान्य अरैखिक एकाकी अवकल समीकरण के लिए केलर[14] द्वारा विकसित की गई थी। इसका प्रस्तुत विवरण सेबेसी इत्यादि[15] में भी पाया जा सकता है। प्रस्तुत दशा में यह विधि दो सीमान्तों पर अरैखिक अवकल समीकरणों के लिए सरलता से सर्वीकृत की जा सकती है।

3. उपरिस्तर घर्षण तथा नुसेल्ट अंक

स्थानीय उपरिस्तर घर्षण गुणांक C_f तथा स्थानीय नुसेल्ट अंक Nu को निम्नवत् परिभाषित किया जाता है—

$$c_f = \frac{\mu\left(\frac{\partial u'}{\partial y'}\right)_{y'=0}}{\frac{\rho U^2}{2}}$$

तथा

$$N\ddot{u} = \frac{1}{(T_w' - T_\infty')}\left(\frac{\partial T'}{\partial y'}\right)_{y=0}$$

जिसे निम्नवत् व्यक्त किया जा सकता है

$$c_f\sqrt{\text{Re}} = 2\sqrt{\xi}\ [f_0''(0) + \xi f_1''(0) + \dots\ ] \tag{20}$$

तथा

$$\frac{Nu}{\sqrt{\text{Re}}} = -\xi^{-1/2}[\theta_0'(0) + \xi\,\theta_1'(0) + \dots\ ] \tag{21}$$

जहाँ $\text{Re} = \frac{UL}{v}$

$f_0''(0)$, $f_1''(0)$ तथा $\theta_0'(0)$, $\theta_1'(0)$ फलनों के आंकिक मान सारणी 1 में Pr = 0.73, 1.0; M = 0.1, 1.0 तथा S = – 0.5, 0.0, 0.5 के लिए सारणीबद्ध किये गये हैं।

परिणाम तथा विवेचना

चित्र 1 में प्रांडल अंक Pr वे विभिन्न मानों के लिए η के विपरीत शून्य कोटिक वेग फलन f_0 दिखाया गया है। यह देखा जाता है कि f'_0 के बढ़ने के साथ साथ Pr घटता जाता है।

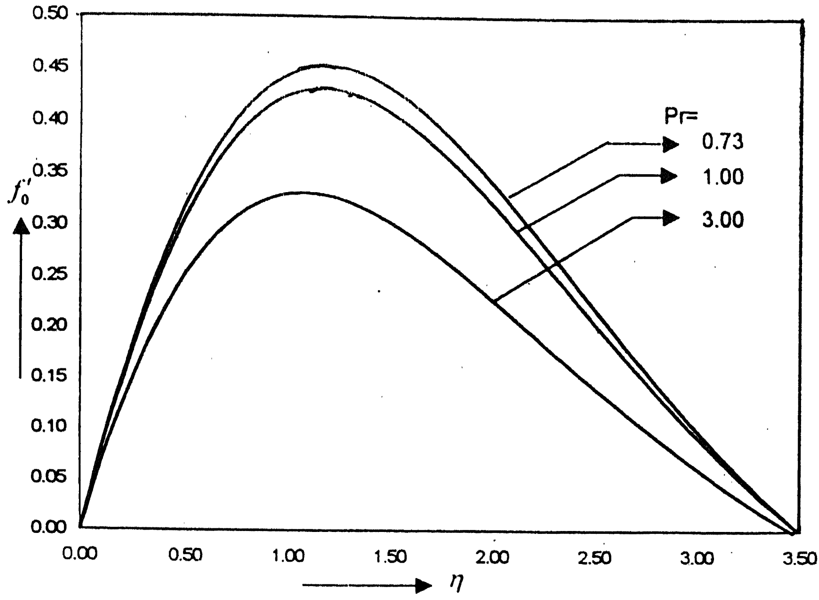
चित्र 2 में प्रथम कोटि वेग को फलन f'_1 को तीन दशाओं में चुम्बकीय क्षेत्र प्राचल M के विविध मानों के लिए η के विपक्ष दिखलाया गया है। ये दशाएँ हैं :

(1) जब S = 0 यानी उष्मा स्रोत/अभिगम अनुपस्थित हो

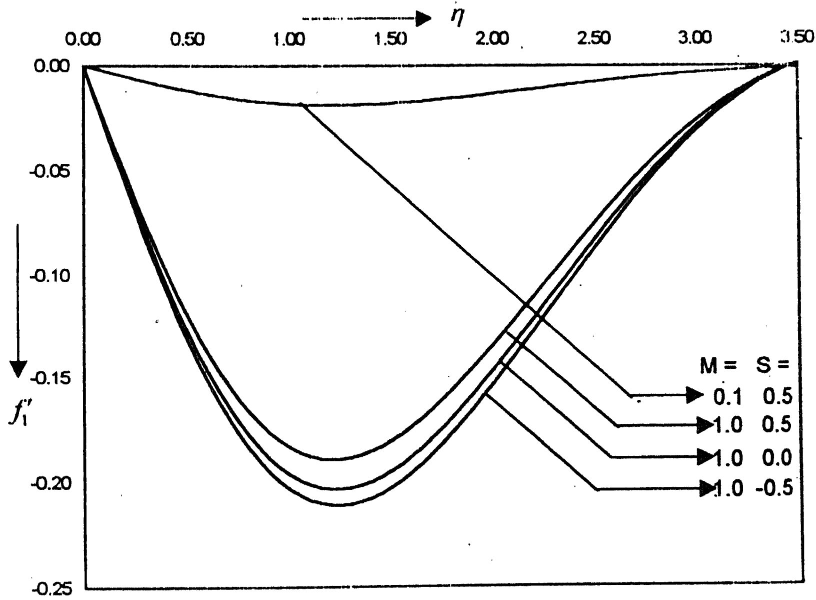
(ii) जब S = 0.5 यानी उष्मा स्रोत उपस्थित हो तथा

(iii) जब S = – 0.5 यानी उष्मा अभिगम उपस्थित हो।

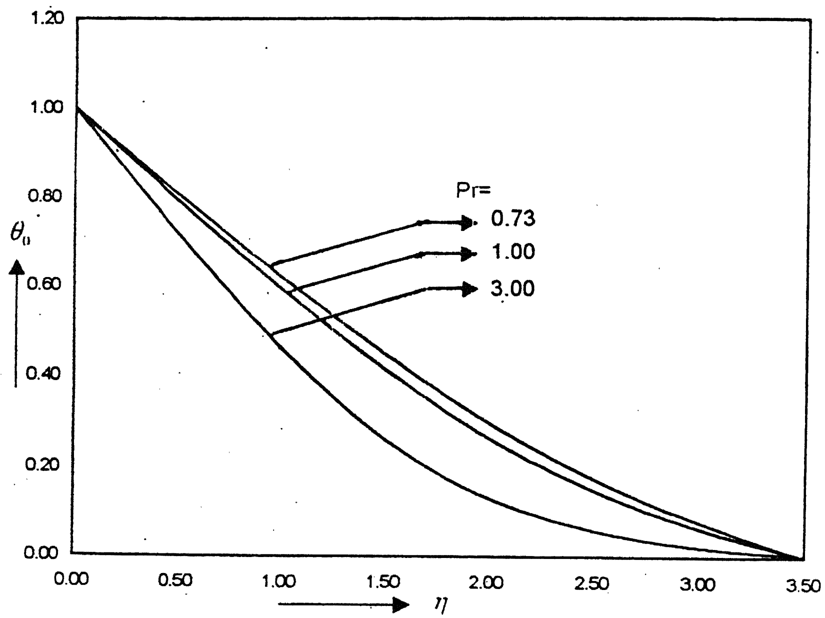
यह देखा जा सकता है कि तीन दशाओं में η के समस्त मानों के लिए फलन f'_1 ऋण रहा आता है। अपरंच, फलन f'_1 उष्मा स्रोत/अभिगम प्राचल S में Pr तथा M के स्थिर के मान के लिए वृद्धि होती है। अतः उष्मा स्रोत की उपस्थिति सीमांत स्तर में वेग के लिए $f^{o}{}_1$ के योगदान को बढ़ाती है जबकि उष्मा अभिगम इसे बढ़ाता है। यह भी देखा जा सकता है कि चुम्बकीय क्षेत्र में वृद्धि के साथ स्थिर Pr तथा S के लिए वेग फलन f'_1 घट जाता है।



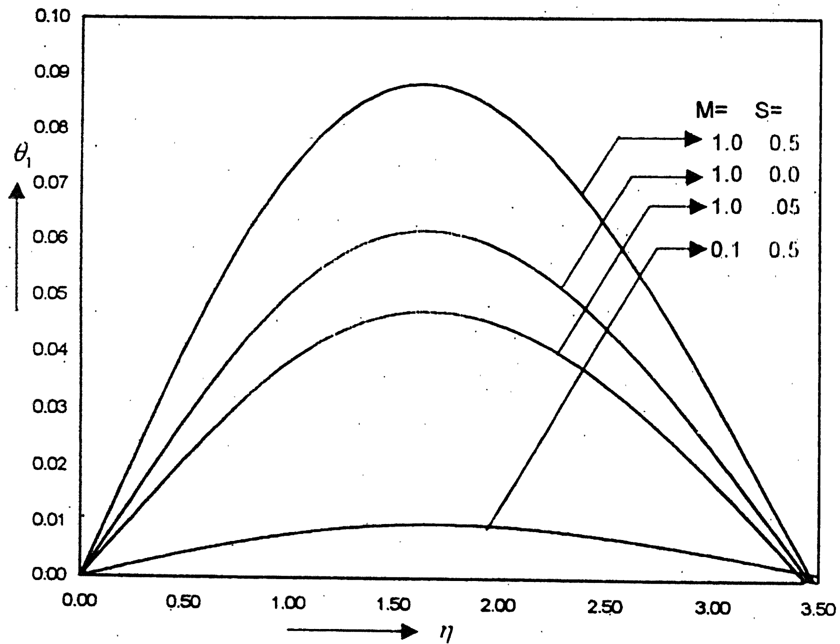
चित्र 1: Pr के विभिन्न मानों के लिए f'_0 का आरेख



चित्र 2: Pr = 0 .673 पर S तथा M के विभिन्न मानों के लिए f'_1 का आरेख



चित्र 3: Pr के विभिन्न मानों के लिए θ_0 का आरेख



चित्र 4: Pr = 0 .673 पर S तथा M के विभिन्न मानों के लिए θ_1 का आरेख

चित्र 3 तथा 4 में ताप फलनों θ_0 तथा θ_1 को विभिन्न प्राचलों के विविध मानों के लिए η के विरुद्ध लेखित किया गया है। चित्र 3 में देखा जा सकता है कि Pr मान में वृद्धि होने से ताप फलन θ_0 घट जाता है।

चित्र 4 से यह देखा जा सकता है कि उष्मा स्रोत की उपस्थिति से ताप फलन θ_1 बढ़ता है जब कि अभिगम की उपस्थिति से घटता है। यही नहीं, चुम्बकीय क्षेत्र प्राचल में वृद्धि ताप फलन θ_1 को बढ़ाता है।

सारणी 1

Pr, M तथा S के विभिन्न मानों के लिए $f_0''(0)$, $f_1''(0)$ $\theta_0'(0)$ एवं $\theta_1'(0)$ के मान

Pr	M	S	$f_0''(0)$	$f_1''(0)$	$\theta_0'(0)$	$\theta_1'(0)$
0.73	0.1	-0.5	0.87320	-0.38393	-0.02911	0.00479
		0.0	0.87320	-0.38392	-0.02820	0.00623
		0.5	0.87320	-0.38392	-0.02642	0.00973
	1.0	-0.05	0.87320	-0.38392	-0.29383	0.04404
		0.0	0.87320	-0.38392	-0.28483	0.05829
		0.5	0.8720	-0.38392	-0.26819	0.08487
1.0	0.1	-0.5	0.84897	-0.41330	-0.02765	0.00566
		0.0	0.84897	-0.41330	-0.02626	0.00788
		0.5	0.84897	-0.41330	-0.02449	0.01071
	1.0	-0.5	0.84897	-0.41330	-0.27955	0.05155
		0.0	0.84897	-0.41330	-0.26696	0.07170
		0.5	0.84897	-0.41330	-0.24007	0.11523
3.0	0.1	-0.5	0.73275	-0.56426	-0.02173	0.00870
		0.0	0.73275	-0.56426	-0.01988	0.01024
		0.5	0.73275	-0.56426	-0.00917	0.02920
	1.0	-0.5	0.73275	-0.56426	-0.21912	0.07435
		0.0	0.73275	-0.56426	-0.19198	0.12330
		0.5	0.73275	-0.56426	-0.07808	0.32350

सारणी 1 तथा समीकरण (20) एवं (21) से यह देखा जाता है कि गुणनफल $C_f \sqrt{}$Re M या Pr के बढ़ने के साथ घटता है या S घटता है तथा प्राचल $N_u \sqrt{}$Re M या S के बढ़ने या Pr के घटने के साथ घटता जाता है।

निष्कर्ष

(i) उष्मा स्रोत की उपस्थिति मुक्त संवहन सीमान्त स्तर में वेग तथा ताप को बढ़ाती है।

(ii) अन्य प्राचलों को स्थिर रखते हुये जब चुम्बकीय क्षेत्र में वृद्धि की जाती है तो उपरिस्तर घर्षण Cf घट जाता है।

(iii) चूँकि समस्त दशाओं के लिए Nu धन है अतः उष्मा पट्टिका से तरल में स्थानान्तरित होती है जिससे पट्टिका का शीतलन होता है जबकि चुम्बकीय क्षेत्र में वृद्धि करने से शीतलन कम हो जाता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय में से एक रोहित कुमार गहलौत, जैनारायण व्यास विश्वविद्यालय, जोधपुर से प्राप्त आर्थिक सहयोग के लिए आभार व्यक्त करता है।

निर्देश

1. पोहलहालन, ई. : ZAMM 1921, 1, 115.

2. ओस्ट्राच, एस. : ASME Trans., 1953, 75, 1287-1290.

3. टखर, एचए एसए, गोर्ला, आर. स. आर. तथा सून्दालगरकर, वी. एम. : Int. J. Num. Methods for Heat and Fluid Flow 1996, 16, 77.

4. एल्बाशबेशी, ई. एम. ए. : Indian J. Pure Appl. Math 1996, 27 (6), 621.

5. टाक, एस. स. तथा गहलौत, रोहित कुमार : Indian Journal of Engg. & Materials Sciences, 2000, 7, 136-140.

6. वही. : The Korean J. of Computational & Appl. Math. (2000) में प्रकाशनार्थ स्वीकृत।

7. वही. : The Indian J. of Pure & Appl. Math. (2000) में प्रेषित.

8. वही. : Indian Academy of Mathematics, 2000 में प्रकाशानार्थ प्रेषित)।

9. लो, जी. एम. : J. Aero. Sci 1955, 22, 329.

10. चैम्बिरे, पी. एल. : Appl. Sci. Res 1957, A6, 393.

11. फे, जे. ए. तथा रिडेल, एफ. आर. : J. Aero Sci. 1958, 25, 73.

12. स्पैरो, ई. एम. तथा सेस, आर. डी., Appl Sci. Res. 1961 A10.

13. शर्मा, पी. आर. तथा माथुर, पंकज, Indian J. Pure Appl. Math., 1995, 26 (11), 1125-1134.

14. केलर, एच. बी. Numerical Methods For Two-Point Boundary Value Problems, Ginn-Blaisdell, Waltham, Mass, 1968.

15. सेबेसी, टंसर तथा ब्रैडशा, पीटर, Momentum Transfer in Boundary Layers (Hemisphere Publishing Corp., McGraw Hill), 1977.

शब्दावली

अपरिवर्ती/स्थायी	...	Steady
अनुप्रस्थ चुम्बकीय क्षेत्र	...	Transverse magnetic field
अभिगम	...	Sink
अरैखिक युग्मित अवकल समीकरण		Non linear coupled differential equation
अप्रक्षुब्ध प्रवाह	...	Laminar flow
अविम राशि	...	Non-dimensional quantities
अभाज्य	...	Prime
उपरिस्तर घर्षण	...	Skin friction
उष्मा अभिवाह	...	Heat flux
क्षयी ऊर्जा	...	Dissipative heat
घर्षणी उष्मा	...	Frictional heat
सीमांत (परिसीमा) स्तर	...	Boundary layer
अरोही विधि	...	Shooting techniques
पृष्ठ उष्मा स्थानान्तरण	...	Surface heat transfer
प्रवाही फलन	...	Stream function
शुद्धगतिक शयानता	...	Kinematic viscosity
समतापी सरंध्रपट्टिका	...	Isothermal porous plate
संवहन प्रवाह	...	Convection flow

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 44, No. 3, July 2001.

इलाहाबाद क्षेत्र के तालाबों में पायी जाने वाली प्रमुख मत्स्य बीमारियों का अध्ययन

सुरेश चन्द्रा
केन्द्रीय मीठाजल जीवपालन अनुसंधान संस्थान,
ओ० आर० पी० केन्द्र, इलाहाबाद

तथा

एस० अय्यप्पन
केन्द्रीय मत्स्य शिक्षा संस्थान (समतुल्य विश्वविद्यालय)
वारसोवा, मुंम्बई

[प्राप्त — मार्च 2, 2001]

सारांश

विकसित आधुनिक प्रौद्योगिकियों के विस्तृत प्रचार एवं प्रसार से इलाहाबाद सहित देश के विभिन्न भागों के जलकृषकों द्वारा मत्स्य पालन व्यापक रूप से अपनाया जाने लगा है। जलक्षेत्रों का समुचित उपयोग होने के साथ अनेक पौष्टिक तत्वों से परिपूर्ण मछली प्रोटीन खाद्यों की दिनोंदिन बढ़ती माँग को पूरा करने में भी सहायक होती है। यद्यपि तालाब से उत्पादित मछलियों में वृद्धि हो रही है लेकिन जलकृषकों को तालाबों में उत्पन्न होने वाली अनेक तरह की बीमारियों एवं उनकी रोकथाम की सम्यक जानकारी न होने के कारण आर्थिक क्षति उठानी पड़ती है। प्रस्तुत प्रपत्र में वर्ष 1998-99 के दौरान इलाहाबाद क्षेत्र के तालाबों में पायी गयी मछलियों में विभिन्न प्रकार की बीमारियों का अध्ययन किया गया है। इनमें ट्राइकोडिनोसिस, पंख एवं पूंछ सड़ने की बीमारी, मिक्सोस्पोरिडियन परजीवियों का संक्रमण, आरगुलोसिस एवं लाल घाव की बीमारी मछलियों की विभिन्न अवस्थाओं में देखी गयी। मत्स्य उत्पादन को प्रभावित करने वाले इन प्रमुख संक्रमणों के कारण एवं लक्षणों का उल्लेख किया गया है।

Abstract

Study on major diseases of pond fishes in Allahabad region. By. Suresh Chandra, ORP Centre of CIFA, 24 Panna Lal Road, Allahabad-2 and S. Ayyappan, Central Institute of Fisheries Education (Deemed University) Varsova, Mumbai.

With disssemination of information on carp culture technologies, fish farming is being widely practiced throughout the country including Allahabad region. Besides to funfill the ever increasing demand of proteinous food, fish farming has also been found an effective tool to harness unutilised water bodies. Although, the fish production level has increased several folds in recent years, however, in many cases fish health problems are not attended properly due to unawareness among fish farmers resulting in lowering of fish production. With an aim to diagnose the common fish diseases occurring in fish ponds of Allahabad region, present study was undertaken during 1998-99. Trichodiniasis, Myxosporidean infection, Tail and Fin Rot, Myxosporidean infection, Argulosis and Epizootic Ulcerative Syndrome have been identified as major diseases, which adversely affected fish growth, survival and total production during culture period. Their symptomatic features and causative agents are disscused.

ग्रामीण तालाबों, पोखरों तथा छोटे-छोटे जलाशयों आदि में मछली पालन पारम्परिक रूप से विशेषकर उत्तर पूर्व एवं दक्षिण भारत के राज्यों में अपनाये जाने विभिन्न ग्रामीण व्यवसायों में से एक रहा है।[1, 2] अधिक उत्पादन एवं लाभप्रद मत्स्य पालन तकनीकियों के विकास, प्रचार एवं प्रसार के फलस्वरूप इस व्यवसाय को अपनाने हेतु इस ओर अधिकाधिक लोगों का रुझान बढ़ रहा है।[3, 4, 5, 6] मछली पालक प्रायः विभिन्न खाद एवं खाद्य पदार्थों का तालाब में उपयोग करने के बाद अपेक्षित उत्पादन नहीं कर पाते हैं। प्रस्तुत प्रपत्र में प्रमुख रोगों का, जिनका कुल मत्स्य उत्पादन पर विपरीत प्रभाव पड़ता है, अध्ययन किया गया है। इलाहाबाद क्षेत्र के तालाबों में वर्ष 1998-99 के दौरान पाये गये विभिन्न रोग, उनके कारण एवं लक्षणों को उल्लिखित किया गया है।

प्रयोगात्मक

इलाहाबाद क्षेत्र में उपलब्ध मछली पालन तालाबों से बीमारी की सूचना मिलने पर रोगग्रस्त मछलियों का तालाब पर जाकर निरीक्षण किया गया। इसके अलावा 1998-99 के दौरान मत्स्य पालकों द्वारा लायी गयी रोगग्रस्त मछलियों का भी निरीक्षण किया गया। रोग से सम्बन्धित सभी तरह की जानकारियाँ, जैसे संक्रमण का स्तर, गम्भीरता, मछलियों की मृत्युदर, लक्षण एवं सम्भावित कारण आदि एकत्रित की गयीं। रोग फैलाने वाले कारकों की पहचान ओ० आर० पी० प्रयोगशाला में की गयी।

परिणाम तथा विवेचना

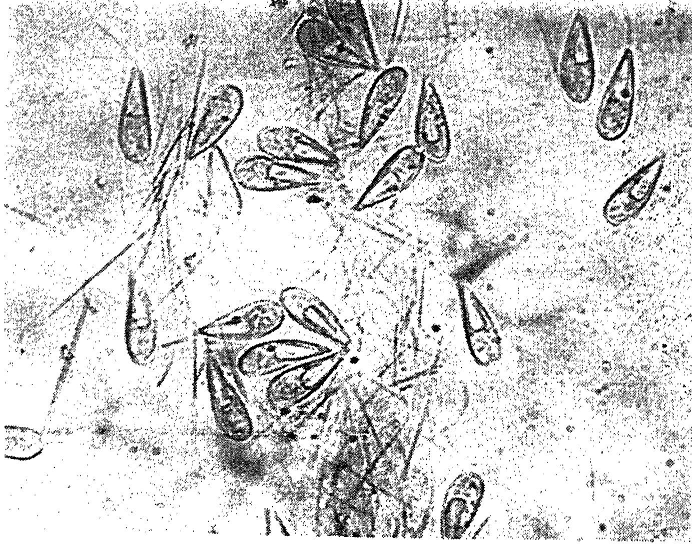
वर्ष के दौरान मछलियों में पाये गये विभिन्न संक्रमणों को सारणी 1 में दर्शाया गया है। मत्स्य प्रजनन हेतु उत्प्रेरण विधि अपनाकर मत्स्य बीज उत्पादन एवं नर्सरी तालाबों में 15 दिन तक संचय क्षेत्र में मानसून के आगमन के साथ ही जून के अन्तिम सप्ताह से शुरू हो जाता है। हैचरियों की नर्सरियों एवं नदी नालों से एकत्रित किये गये मत्स्य बीज में मुख्य रूप से ट्राइकोडिना एवं मिक्सोस्पोरिडियन वर्ग के परजीवियों का संक्रमण पाया गया। ट्राइकोडिना नामक परजीवियों का संक्रमण पंखों, त्वचा के ऊपर ही देखा गया। सूक्ष्मदर्शी यंत्र द्वारा पंखों का निरीक्षण करने पर ट्राइकोडिना परजीवी एवं छोटे-छोटे लाल घाव दिखायी दिये। नर्सरी तालाबों में इनकी संक्रमण दर 10-80 प्रतिशत तक देखी गयी। ट्राइकोडिनोसिस बीमारी में रोहू, भाकुर तथा नैन समान रूप से प्रभावित हुईं। मिक्सोस्पोरिडियन परजीवियों द्वारा भाकुर प्रजाति की मछली सबसे अधिक प्रभावित हुई। भाकुर के गलफड़ों में उनकी उपस्थिति देखी गयी। अधिक गम्भीरता की अवस्था में पूरे गलफड़े इनके म्यूकोइड सिस्ट से ढके देखे गये। नैन में ज्यादातर शरीर के शल्कों के बीच यह सिस्ट देखी गयी। इससे मछलियाँ अत्यन्त कमजोर एवं वृद्धि दर भी कम पायी गयी। मत्स्य बीज संवर्धन हेतु अपनाये गये नर्सरी तालाबों में दोनों तरह के परजीवियों के संक्रमण से जीरों की उत्तरजीविता दर भी सामान्य नर्सरी तालाबों की अपेक्षा कम पायी गयी।

एक अन्य तरह की लक्षणों वाली बीमारी का प्रकोप भी छोटी मछलियों में देखा गया। इनके लक्षणों में पंख एवं पूँछ का टूटना, धीरे-धीरे इनका सड़ना एवं रोगग्रस्त मछलियों की तालाब में असामान्य गतिविधियाँ देखी गयीं। मछलियों का कमजोर होना एवं उत्तरजीविता दर में कमी इसके हानिकारक परिणाम पाये गये।

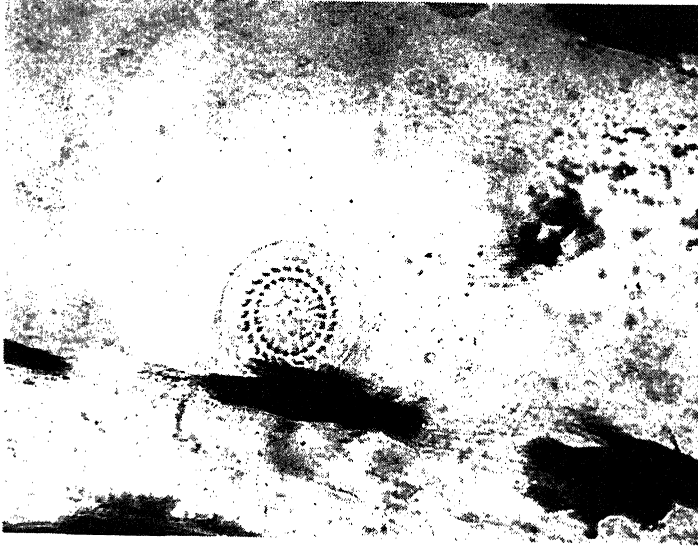
यह बीमारी शुरुआत में एरोमोनास हाईड्रोफिला नामक बैक्टीरिया द्वारा उत्पन्न की जाती है लेकिन इसके बाद कवक आदि इसमें प्रवेश कर इसकी गम्भीरता को और बढ़ा देते हैं।

मिक्सोस्पोरिडियन परजीवी द्वारा संक्रमित मछलियों में पूरे शरीर के शल्कों के बीच वाली जगहों पर धब्बेनुमा सफेद-सफेद चिन्ह अथवा थैली का दिखायी देना, गलफड़ों की सतहों के ऊपर सफेद रंग का थैलीनुमा गोलाकार सिस्टों का जमाव देखा गया जिनके अन्दर हजारों की संख्या में स्पोर रहते हैं। ये परजीवी परिपक्व होकर शरीर से छूट जाते हैं और कुछ दिन तालाब के पानी और तलहटी में रहकर नये सिरे से मछलियों के ऊपर चिपके रहते हैं और उनकी सामान्य शारीरिक क्रियाओं को बाधित करते हैं।

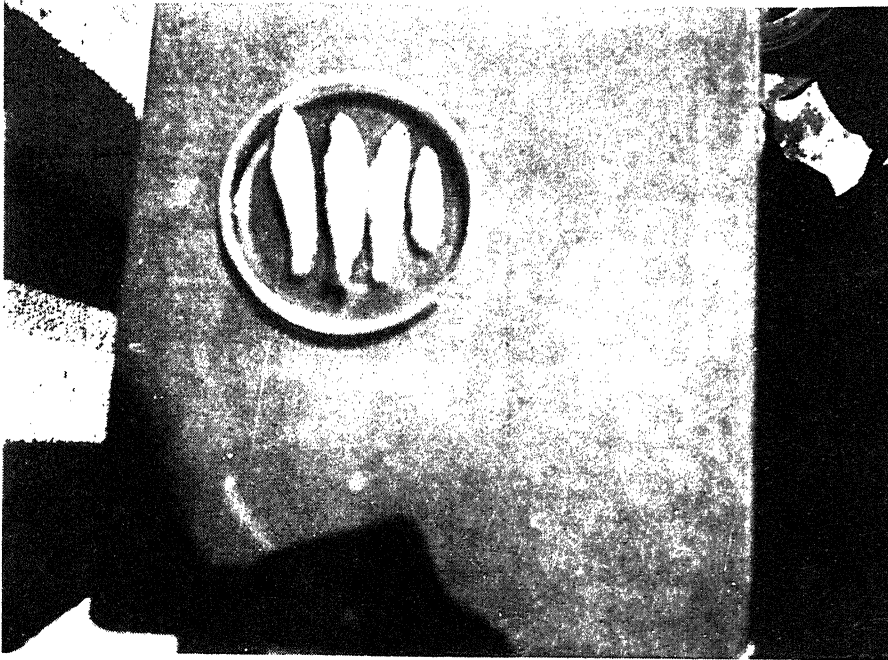
गर्मी के शुरुआती महीनों एवं अगस्त-सितम्बर में क्षेत्रीय तालाबों में क्रस्टेशियन वर्ग के अरगुलस नामक परजीवी का व्यापक प्रकोप देखा गया। यह बीमारी प्रायः 200-300 ग्राम से अधिक वजन वाली मछलियों में ज्यादा पायी गयी। चूँकि इनका आकार बड़ा होता है अतः इन्हें नग्न आँखों से भी देखा जा सकता है। रोग की आरम्भिक अवस्था में कुछएक परजीवी नीचे की तरफ वाले पंखों की जड़ों पर चिपके हुये रहते हैं जहाँ हल्का लाल-लाल दाग सा दिखायी देता है। इनसे प्रभावित



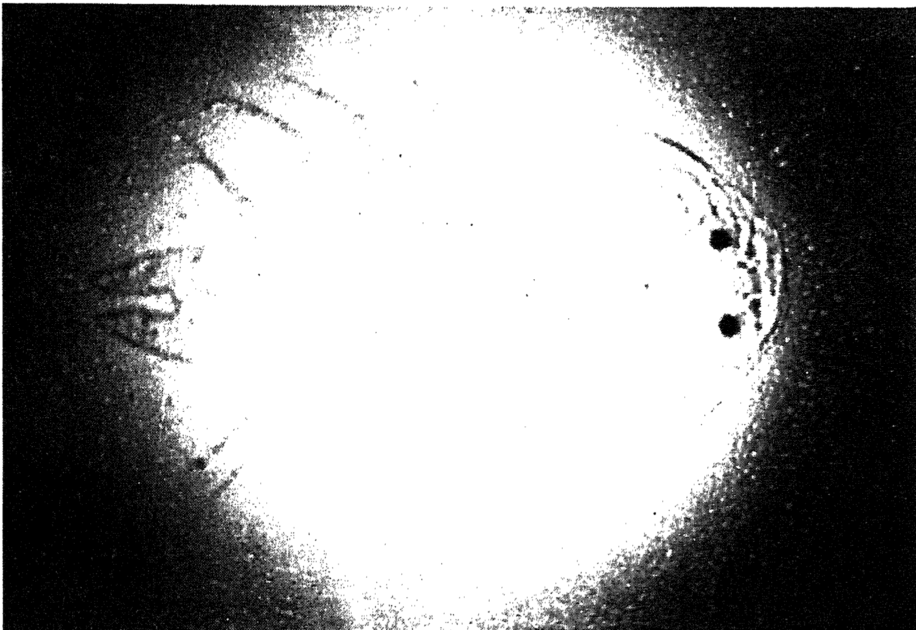
मिक्सोस्पोरिडियन परजीवी



ट्राइकोडिना



पूछ और पंख सड़ने की बीमारी से ग्रसित रोहू



आरगुलस परजीवी

सारणी 1

क्षेत्रीय तालाबों में वर्ष *1998-99* के दौरान पायी गई प्रमुख बीमारियों का विवरण

संक्रमण का प्रकार	रोगाणु	संक्रमित मत्स्य प्रजातियाँ एवं संक्रमण का समय	प्रभावित मछलियों का आकार ग्राम में	प्रमुख लक्षण	प्रभावित अंग	संक्रमण का प्रतिशत	गम्भीरता का स्तर	हानि
ट्राइकोडिन्यासिस	**ट्राइकोडिना ट्राइकोडिनिला**	सभी पालतू मत्स्य प्रजातियाँ, जीरा एवं अंगुलिका संवर्धन के समय	01.—120	मछलियों का असामान्य व्यवहार	गलफड़ें, त्वचा एवं पंख	10-80	+++	भार में कमी एवं मृत्यु
पंख एवं पूँछ सड़ने की बीमारी	**एरोमोनास हाइड्रोफिला**	सभी पालतू मत्स्य प्रजातियाँ, वर्षाकालीन समय में अधिक	0.1—150	पंख, पूँछ का टूटना एवं सड़ना	पंख एवं पूँछ	15-25	++	भार में कमी एवं मृत्यु
मिक्सोस्पोरि-डियन संक्रमण	**मिक्सोवोलस, हेनीगुआ एवं थेलोहैलेनस**	भाकुर *(Catta Catta)* में सबसे अधिक, नैन *(Cirrhinus mrigala)* में सामान्य, अन्य में कम	0.1— प्रौढ़ अवस्था तक	गलफड़ों एवं शरीर के ऊपर सफेद थैलीनुमा धब्बे का होना	गलफड़ें, त्वचा एवं आन्तरिक अंग	20-60	+++	भार में कमी एवं मृत्यु
आरगुलोसिस	**आरगुलस**	रोहू में सर्वाधिक, अन्य प्रजातियों में भी संक्रमण पाया जाता है	200—300 ग्राम से अधिक	पंखों के नीचे हल्के, लाल-लाल दाग एवं परजीवियों का शरीर पर रेंगना	त्वचा	5-75	+++	भार में कमी एवं मृत्यु
एपिजूटिक अल्सरेटिव सिन्ड्रोम	**एफोनोमाइसिज इनवेडन्स**	सभी मछलियाँ लेकिन शुरुआत अवांछनीय मछलियों से	200— प्रौढ़ अवस्था तक	शरीर पर लाल-लाल बड़े आकार के घावों का दिखना	त्वचा	3-20	+	भार में कमी अल्प मृत्युदर

मछलियाँ भी असामान्य व्यवहार प्रदर्शित करती हैं। लेकिन जैसे-जैसे इन परजीवियों की संख्या बढ़ती है, ये पूरे शरीर के ऊपर संसंजक अंग द्वारा सख्त चिपक कर मछलियों के जीवद्रव्य का शोषण करती है। सामान्यतः रोहू प्रजाति की मछलियों में इनका संक्रमण काफी गहन होता है लेकिन मृगाल, कतला, ग्रासकार्प, कॉमन कार्प तथा सिल्वर कार्प मछलियों में भी इसका आक्रमण देखा गया। प्रभावित मछलियाँ बेचैन होकर तालाब के किनारों पर एवं सतह पर बार-बार आती हैं, शरीर को तालाबों में पड़े ठोस पदार्थों पर रगड़ती हैं, शरीर पर हल्के-हल्के लाल दाग भी दिखाई देते हैं तथा गम्भीर संक्रमण की अवस्था में मछलियाँ मरने लगती हैं। प्रजनक मछलियों में आरगुलस परजीवी का आक्रमण काफी हानिकारक होता है। इससे इनकी अण्ड उत्पादन क्षमता घट जाती है जिससे हैचरियों का मत्स्य बीज उत्पादन कार्य प्रभावित होता है।

क्षेत्रीय तालाबों में जाड़ों के महीनों एवं वर्षाकालीन मौसम के बाद प्रायः लाल घाव की बीमारी का प्रकोप देखा गया। पालतू एवं अवांछनीय मत्स्य प्रजातियों के ऊपर छोटे बड़े लाल-लाल घावों की संख्या मछली के आकार, उम्र, स्वास्थ्य एवं जलीय गुणवत्ता के आधार पर एक दो से लेकर 5-6 की संख्या में पाये गये। यह एक कवकजनित रोग है जिसे एफोनोमाइसिज इनवेडन्स कहते हैं। यह धीरे-धीरे वृद्धि करता है और पानी के 26-28 डिग्री सेल्सियस तापमान पर ज्यादा तेजी से बढ़ता है। शायद यही कारण है कि इसका प्रकोप ऐसे महीनों में ज्यादा देखा जाता है। जब तालाब के जल का तापमान इसी स्तर पर रहता है। बीमारी की शुरुआत में अवांछनीय मछलियाँ जो पानी इत्यादि के साथ न चाहते हुए भी प्रवेश कर जाती हैं, इस बीमारी की चपेट में आती हैं। इनमें प्रमुख रूप से सिधरी (पुटिया), सौरी, कोई, मागुर, सिंघी, टैंगर आदि के ऊपर लाल-लाल घाव दिखायी देते हैं और ये मरकर तालाबों के किनारों पर तैरती दिखाई देती हैं। इसके पश्चात् पालतू प्रजाति की मछलियों में भी इसी तरह के लक्षण प्रकट होते हैं और मछलियाँ रोगग्रस्त होकर मरने लगती हैं।

यद्यपि तालाबों में छुटपुट रूप से मछलियों में जलोदर बीमारी (Dropsy), इच बीमारी (Ich), वर्म (Gyrodactylus & Dacetylogyrus) आदि बीमारियाँ भी पायी गयीं लेकिन प्रमुखता के आधार पर इन्हीं पाँच तरह की बीमारियों का प्रकोप नर्सरी एवं पालन तालाबों में पाया गया।

ग्रामीण अंचलों में ज्यादातर मत्स्य-पालन ऐसे तालाबों में किया जाता है जिनका उपयोग अनेक तरह के कार्यों में होता है। इनमें कार्बनिक पदार्थों की भी अधिकता रहती है। इसके साथ ही पूर्ण साफ-सफाई के अभाव में अवांछनीय मछलियाँ तथा जलीय खरपतवार भी उपस्थित रहते हैं। फरवरी-मार्च के बाद के महीनों में जल के तापमान के बढ़ने के साथ मछलियों की सभी शारीरिक क्रियाओं में भी वृद्धि होने लगती है। कीचड़, मछलियों द्वारा उत्सर्जित मल, तालाब में खाद एवं खाद्य पदार्थों के अवशेष आदि के विघटन के लिये आवश्यक घुलित आक्सीजन की माँग भी बढ़ती जाती है। ऐसे समय में तालाबों के जल की उचित गुणवत्ता कायम रखना आवश्यक हो जाता है। परजीवी इत्यादि जो अनचाहे तालाबों में अनेक माध्यम से प्रवेश पा लेते हैं सामान्य परिस्थितियों में ये मछलियों को रोगग्रस्त करने में सक्षम नहीं होते हैं लेकिन पानी के गुणों में गिरावट

से रोगाणु सक्रिय हो जाते हैं और अपनी संख्या वृद्धि करते हैं। मछलियाँ तनावग्रस्त होकर परजीवी, कवक, जीवाणु आदि की लपेट में आ जाती हैं फलस्वरूप मछलियाँ बीमारी से ग्रस्त होती हैं और किसान के उत्पादन पर प्रतिकूल असर पड़ता है। सेली[7] एवं मेयर[8] ने भी विभिन्न मत्स्य बीमारियों पर शोध करने के उपरान्त यह पाया कि तनाव ही मूल रूप समस्त बीमारियों की जड़ है। इससे परोक्ष रूप में मछलियों की मृत्यु एवं अपरोक्ष रूप में बढ़वार पर प्रतिकूल असर पड़ता है। मत्स्य बीमारियों की वजह से स्वाभाविक ही इनकी संख्या में भी ह्रास होता है। इसी तरह का परिणाम नन्दी तथा दास[9] ने पश्चिमी बंगाल की मछलियों में किये गये अपने अनुसंधान में पाया। उन्होंने दर्शाया कि मछलियों में आरगुलस परजीवी के संक्रमण से मछलियों की संख्या में गिरावट हो रही है।

प्रस्तुत अध्ययन से यह सपष्ट होता है कि जहाँ एक ओर एक इकाई जल क्षेत्र से मत्स्य उत्पादन में वृद्धि हो रही है वहीं बीमारियों का प्रकोप भी मछलियों में पहले की अपेक्षा अधिक दिखाई देने लगा है। नियमित रूप से तालाबों की साफ-सफाई, जलीय वनस्पतियों का उन्मूलन, स्वस्थ जीरों का तालाबों में संचय, समय-समय पर चूने का प्रयोग एवं बीमारी उत्पन्न होने की अवस्था की सही पहचान कर उचित रोकथाम आदि जैसे कार्य स्वास्थ्य सम्बन्धी समस्याओं के कारगर बचाव एवं निदान में सहायक होते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

प्रथम लेखक केन्द्रीय मीठाजल जीवपालन अनुसंधान संस्थान के निदेशक का आभारी है जिनकी प्रेरणा एवं मार्गदर्शन से यह कार्य सम्भव हो सका। साथ ही वह स्थानीय मत्स्यपालकों के सहयोग के लिये उन्हें भी धन्यवाद ज्ञापित करता है।

निर्देश

1. अलीखुनी, के० एच० (1957) : फिश कल्चर इन इन्डिया : ए० एफ० ए० एम० बुलेटिन नं० 20, भारतीय कृषि अनुसंधान परिषद्, नई दिल्ली। 144 पृष्ठ।

2. होरा, एस० एल० तथा पिल्लई, टी० वी० आर० (1962) : हैन्डबुक आन फिश कल्चर इन दि इन्डो-पैसफिक फिशरीज़ रीज़न। एफ० ए० ओ०, फिश० बायो० टेक्निकल पेपर, 204 पृष्ठ।

3. लक्ष्मन, एम० ए० वी०, सुकुमारन, के० के०, मूर्ती, डी० एस०, चक्रवर्ती, डी० पी० तथा फिलीपोस, एम० पी० (1971): प्रिलिम्नरी आबज़रवेशन्स ऑन इन्टेन्सिव फिश फारमिंग इन फ्रेश वाटर पांड्स — बाई दि कम्पोजिट कल्चर ऑफ इन्डियन एवं एग्ज़ोटिक स्पेसिज़। जनरल० इन० फिश० सोसा० इन्डिया, 3 : 1-21।

4. चक्रवर्ती, आर० डी०, सेन, पी० आर०, राव० एन० जी० एस०, घोष, एस० आर०, जैना, एस० तथा जानकीराम, के० (1980) : ऑबज़रवेशन ऑन इन्टेन्सिव कम्पोज़िट फिश कल्चर। प्रोसिंडिंग इन्डो-पैसफिक फिश कौन्सिल, 19 (3) : 515-520

5. त्रिपाठी, एस० डी० (1984) : एडप्टिव रिसर्च इन कार्प फारमिंग इन डिफरेन्ट पार्ट्स आफ इन्डिया। इन फोर्थ एडवाइज़री कमेटी मीटिंग आफ नाका (एफ० ए० ओ०; यू० एन० डी० पी० प्रोजेक्ट) सीफा, भुवनेश्वर 29-35

6. त्रिपाठी, एस० डी०, अरविन्दाक्षन, पी० के० अयप्पन, एस०, जैना, जे० के०, मुदली, एच० के०, चन्द्र, सुरेश तथा पानी, के० सी० (2000) : न्यू हाई इन कार्प प्रोडक्शन इन इन्डिया थ्रू इन्टेन्सिव पालीकल्चर इन ज० एक्वा० ट्रौप०,. 15 (2) : 119-128 पृष्ठ।

7. सेली, एच० (1950): द इवूल्यूशन ऑफ स्ट्रैस कौनसेप्ट। अमेरिकन० साइ०, 61 : 692-699

8. मेयर, एफ० पी० (1970) : सीज़नल फ्लॅक्चुएशन इन दी इन्सीडैन्स ऑफ डिजीजेज़ ऑन फिश फार्म। इन एस० एफ० सिन्स्की (एडि) सिम्पोज़ियम ऑन डिजीजेज आफ फिशेज़ एबिड सेल फिशेज़, अमे० फिश० सोसा० स्पे० पब्लि० नं० 5 : 21-29

9. नन्दी, एन० सी० तथा दास, एस० आर० (1991) : आरगुलोसिस कौजिंग जुबिनाइल मौरटेलिटीज इन सम फिशेज़ ऐट काकद्वीप, पश्चिम बंगाल। इन० जर० फिश 32 (1) : 132-133

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 44, No. 3, July 2001.

सार्वीकृत गोलाभ तरंग फलन तथा सम्प्रेषण सहित नवीन रूपान्तर

रतन सिंह
144 सुन्दर नगर, रायपुर (छत्तीसगढ़)

[प्राप्त — दिसम्बर 2, 2000]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य फ्लैमर के गोलाभ तरंग फलनों के कार्य क्षेत्र को बढ़ाते हुए अन्तराल - 1 < x < 1 अन्तराल में परिभाषित विशिष्ट फलनों के एक अति सामान्य सेट को प्रचारित करना और प्रत्यास्थता के एक निर्मेय को हल करने के लिए एक नया रूपान्तर गढ़ना है। ऐसा विश्वास है कि ये परिणाम नवीन हैं और अभी तक ज्ञात अधिकांश दशाओं को समेटने वाले हैं।

Abstract

Generalized spheroidal wave function and a new transform with application. *By* Rattan Singh, 144, Sundar Nagar, Raipur, (Chhattisgarh).

The object of this paper is to introduce a very general set of special functions defined in the interval $-1 < x < 1$ extending the scope of spheroidal wave functions of Flammer and to coin a New Transform in order to solve a problem in elasticity. The results are believed to be new and embrace most of the cases known so far.

1. प्रस्तावना

कुइपर्स तथा म्योलेनबेल्ड[6] ने लीजेण्ड्र सम्बद्ध फलन $P_n^m(x)$ को सर्वीकृत किया है जो

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2\upsilon}{dx^2}-2x\frac{d\upsilon}{dx}+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{\left(1-x^2\right)}\right]\upsilon=0 \qquad (1.1)$$

$$-1<x<1$$

का हल है जिसे फलन $P_k^{m,n}(k)$ को

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2\upsilon}{dx^2}-2x\frac{d\upsilon}{dx}+\left[k(k+1)-\frac{m^2}{2(1-x)}-\frac{n^2}{2(1+x)}\right]\upsilon=0 \tag{1.2}$$

के हल के रूप में प्रचारित किया गया है। यह देखना आसान है कि

$$P_k^{m,m}(x)=P_k^m(x) \tag{1.3}$$

फ्लैमर[3] ने लीज़ेन्ड्र सम्बद्ध फलनों के विस्तार को $S_{mn}(c, x)$ के रूप में ज्ञात किया जो अवकल समीकरण

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{d}{dx}\right]+\left[\lambda_{mn}-c^2x^2-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0 \tag{1.4}$$

का हल है तथा $S_{mn}(c, x)$ को

$$S_{mn}(c, x)=\sum_{r=0,1}^{\infty}{}' d_r^{m,n}(c)\,P_{m+r}^m(x) \tag{1.5}$$

के रूप में व्यक्त किया जाता है जहाँ

$$P_n^m(x)=\left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}\left[P_n(x)\right]$$

प्रथम प्रकार का लीजेन्ड्र सम्बद्ध फलन है। संकलन चिन्ह के ऊपर अभाज्य संख्या सूचित करती है कि संकलन केवल r के सम मानों के लिए है जब n-m सम है और जब n-m विषम है तो r के विषम मानों के ऊपर होता है।

$S_{mn}(c, x)$ फलनों से लाम्बिक गुण

$$\int_{-1}^{1} S_{mn}(c, s)\,S_{m,n'}(c, x)\,dx=\delta_{nn'}\,N_{mn} \tag{1.6}$$

की तुष्टि होती है जहाँ $$N_{mn}=2\sum_{r=0,1}^{\infty}{}'\frac{\left\{d_r^{m,n}(c)\right\}^2.(r+2m)!}{(2r+2m+1).r!}$$

तथा $$\delta_{nn'} = \begin{cases} 0, & \text{if } n' \neq n \\ 1, & \text{if } n' = n \end{cases}$$

क्रोनेकर डेल्टा है।

इस लाम्बिक गुण के द्वारा एक समाकल रूपान्तर को गुप्ता तथा गुप्ता[4] ने निम्नवत् परिभाषित किया है

$$T\{F(x)\} = \mathcal{J}_{mn}(c) = \int_{-1}^{1} F(x)\, S_{mn}(c, x)\, dx \tag{1.7}$$

जिसका प्रतीयन सूत्र है—

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{J}_{mn}(c)\, S_{mn}(c, n)}{N_{mn}} \tag{1.8}$$

इस साम्य पर गुप्ता[5] ने सार्वीकृत जैकोबी बहुपद $\phi_n^{(\alpha,\beta)}(c, x)$ परिभाषित किया है जिसे

$$\left(1 - x^2\right) \frac{d^2 y}{dx^2} + \{(\beta - \alpha) - (\beta + \alpha + 2)x\} \frac{dy}{dx} + \left\{X(c) - c^2 x^2\right\} y = 0 \tag{1.9}$$

का हल माना जाता है और इसका रूप है—

$$\phi_n^{(\alpha,\beta)}(c, x) = \sum_{j=0}^{\infty} d_{j,n}^{\alpha,\beta}(c)\, P_{n+j}^{\alpha,\beta}(x) \tag{1.10}$$

जहाँ $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ जैकोबी बहुपद है। $\phi_n^{(\alpha,\beta)}(c, x)$ से लाम्बिक गुण

$$\int_{-1}^{1} (1 - x)^{\alpha} (1 + x)^{\beta}\, \phi_n^{(\alpha,\beta)}(c, x)\, \phi_{n'}^{(\alpha,\beta)}(c, x)\, dx = N_n^{\alpha,\beta} \cdot \delta_{nn'} \tag{1.11}$$

के साथ साथ

$$N_n^{\alpha,\beta}$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ d_{j,n}^{\alpha,\beta}(c) \right\}^2 \cdot \frac{2^{\alpha+\beta+1}\, \Gamma(n + j + \alpha + 1)\, \Gamma(n + j + \beta + 1)}{\{2(n+j) + \alpha + \beta + 1\}\, \Gamma(n+j+1)\, \Gamma(n+j+\alpha+\beta+1)}$$

की तुष्टि होती है। इस गुण के द्वारा गुप्ता[5] ने रूपान्तर

$$T\{F(x)\} = \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} F(x)\, \phi_n^{(\alpha,\beta)}(c, x)\, dx$$

$$= \overline{F}_n^{(\alpha,\beta)}(c) \qquad (1.12)$$

को व्युत्क्रम सूत्र के साथ

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{F}_n^{(\alpha,\beta)}(c)\, \phi_n^{(\alpha,\beta)}(c, n)}{N_n^{\alpha,\beta}(c)}$$

तथा $N_n^{\alpha,\beta}(c)$ के उपर्युक्त मान को प्रचारित किया।

2. नवीन फलन

उपर्युक्त फलनों के कार्य क्षेत्र को फलन

$$R_h^{m,n}(n, c) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu_r^{m,n}(c)\, P_{k+r}^{m,n}(x) \qquad (2.1)$$

की परिभाषा के द्वारा विस्तार देना चाहते हैं जो अवकल समीकरण

$$\frac{d}{dx}\left\{\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\right\} + \left\{\lambda(c) - c^2x^2 - \frac{m^2}{2(1-x)}\ \frac{n^2}{2(1+x)}\right\} y = 0 \qquad (2.2)$$

की तुष्टि करता है। $P_k^{m,n}(x)$ सार्वीकृत लीजेन्ड्र के सम्बद्ध अवकल समीकरण (1.2) का हल होने से इसे निम्नवत् व्यक्त किया जा सकता है।

$$P_k^{m,n}(x) = \frac{2^n (1+x)^{-\frac{n}{2}} (1+x)^{-\frac{m}{2}}}{\Gamma(1-m)} \cdot F\left[\begin{matrix} -\alpha,\ \delta+1 \\ 1-m \end{matrix};\ \frac{1-x}{2}\right]$$

$$= \frac{(1+x)^{\frac{n}{2}} (1-x)^{-\frac{m}{2}}}{\Gamma(1-m)} \cdot F\left[\begin{matrix} \beta+1,\ -\gamma \\ 1-m \end{matrix};\ \frac{1-x}{2}\right] \qquad (2.3)$$

जहाँ $\alpha = k + \frac{m+n}{2}, \qquad \beta = k - \frac{m-n}{2}$

$$\gamma = k + \frac{m-n}{2}, \qquad \delta = k - \frac{m+n}{2}$$

$P_k^{m,n}$ (x) फलनों में सन्दर्भ[7] में स्थापित लाम्बिक गुण निम्नवत् होते हैं–

$$\int_{-1}^{1} P_k^{m,n}(x)\, P_{k'}^{m,n}(x)\, dx = \delta_{kk'} \frac{2^{n-m+1}\, \alpha!\, \gamma!}{(2k+1)\, \beta!\, \delta!} \tag{2.4}$$

(2.4) के कारण यह देखना आसान है कि $R_k^{m,n}(x, c)$ फलनों से लाम्बिक गुण

$$\int_{-1}^{1} R_k^{m,n}(x, c)\, R_{k'}^{m,n}(x, c)\, dx = \delta_{kk'}\, M_k^{m,n}(c) \tag{2.5}$$

के साथ साथ

$$M_k^{m,n}(c) = \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \mu_r^{m,n}(c) \right\}^2 \frac{2^{n-m+1}\, \Gamma(\alpha+r+1)\, \Gamma(\gamma+r+1)}{\{2k+2r+1\}\, \Gamma(\beta+r+1)\, \Gamma(\delta+r+1)}$$

की तुष्टि होती है। यदि **n=m** तो यह देखा जाता है कि

$$R_k^{m,n}(x, c) = R_k^{m,m}(x, c) = S_{mk}(c, x)$$

अर्थात्

$$R_n^{m,m}(x, c) = S_{mn}(c, x) \tag{2.6}$$

और भी

$$R_{n+\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\alpha,\beta}(x, c) = (1-x)^{\frac{\alpha}{2}}\, (1+x)^{\frac{\beta}{2}}\, \phi_n^{(\alpha,\beta)}(c, x) \tag{2.7}$$

3. रूपान्तर

अब हम रूपान्तर की परिभाषा सम्बन्ध

$$\hat{F}_k^{m,n}(c) = \int_{-1}^{1} F(x)\, R_k^{m,n}(x,c)\, dx = T_k\{F(x)\} \tag{3.1}$$

के द्वारा देते हैं और इसको सार्वीकृत सम्बद्ध लीजेड्र रूपान्तर कहते हैं। हम मान ले रहे हैं कि F (x) को सार्वीकृत फूरियर श्रेणी के पदों में विस्तार दिया जा सकता है, अर्थात्

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(c)\ R_k^{m,n}(x, c) \tag{3.2}$$

तब (3.2) के दोनों पक्षों में $R_k^{m,n}(x, c)$ से गुणा करते हैं, और -1 तथा +1 सीमाओं के मध्य समाकलित करने से हमें (2.5) के बल पर

$$\hat{F}_k^{m,n}(c) = A_k(c) \sum_{r=0}^{\infty} \left\{\mu_r^{m,n}(c)\right\}^2 \frac{2^{n-m+1}(\alpha+r)!\,(\gamma+r)!}{(2k+2r+1)\,(\beta+r)!\,(\delta+r)!}$$

$$= A_k\, M_k^{m,n}(c)$$

प्राप्त होगा जहाँ से व्युत्क्रमण (3.2) का रूप

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{F}_k^{m,n}(c)}{M_k^{m,n}(c)}\ R_k^{m,n}(x, c) \tag{3.3}$$

हो जाता है। निर्देश[4] तथा[5] में दिये गये रूपान्तर (2.6) तथा (2.7) सम्बन्धों के कारण (3.1) की विशिष्ट दशायें बन जाते हैं। इस तरह

$$T\{f(x)\} = \int_{-1}^{1} f(x)\ S_{mn}(c, x)\, dx = \int_{-1}^{1} f(x)\ R_n^{m,n}(c, x)\, dx$$

तथा

$$T\{f(x)\} = \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}\ (1+x)^{\beta}\ F(x)\ \phi_n^{(\alpha,\beta)}(c, x)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (1-x)^{\frac{\alpha}{2}}\ (1+x)^{\frac{\beta}{2}}\ F(x)\ R_{n+\frac{\alpha+\beta}{2}}^{(\alpha,\beta)}(c, x)\, dx$$

यह ध्यान देने की बात है कि सार्वीकृत जैकोबी रूपान्तर (1.12) को (1.7) से प्राप्त नहीं किया जा सकता जबकि रूपान्तर (3.1) से (1.7) तथा (1.12) दोनों ही विशिष्ट दशायों के रूप में प्राप्त होते हैं।

अब हम एक प्रमेय को सिद्ध करेंगे जिसकी आवश्यकता रूपान्तर के सम्प्रयोग में होगी।

$$L_x\{F(x)\} = \frac{d}{dx}\left\{\left(1-x^2\right)\frac{dF}{dx}\right\} - \left\{\frac{m^2}{2(1-x)} + \frac{n^2}{2(1+x)}\, c^2x^2\right\}F$$

स्वतः संलग्न आपरेटर है

प्रमेय : यदि $F(x)$ तथा $F'(x)$ परिबद्ध हों अन्तराल $-1 \le x \le 1$ में, $F'(x)$ परिबद्ध हो तथा $-1 < x < 1$ के उप अन्तरालों में प्रत्येक में समाकलनीय हो तो $F(x)$ का सर्वीकृत संबद्ध लीजेन्ड्र रूपान्तर विद्यमान होता है और यदि

$$\left[\left(1-x^2\right)\frac{\partial F}{\partial x} R_k^{m,n}(x, c) - \left(1-x^2\right)\frac{\partial}{\partial x}\left\{R_k^{m,n}(x, c)\right\}F\right]_{-1}^{1} = 0 \qquad (3.4)$$

तो

$$T_k\left[L_x\{F(x)\}\right] = -\lambda(c)\,\hat{F}_k^{m,n}(c) \qquad (3.5)$$

उपपत्ति : हमें प्राप्त है–

$$T_k\left[L_x\{F(x)\}\right] = \int_{-1}^{1}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(1-x^2\right)\frac{\partial F}{\partial x}\right\} - \left\{\frac{m^2}{2(1-x)} + \frac{n^2}{2(1+x)} + c^2x^2\right\}F(x)\right] R_k^{m,n}(x, c)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(1-x^2\right)\frac{\partial F}{\partial x}\right\} R_k^{m,n}(x, c)\, dx\right.$$

$$- \int_{-1}^{1}\left[\left\{\frac{m^2}{2(1-x)} + \frac{n^2}{2(1+x)} + c^2x^2\right\}F(x)\right] R_k^{m,n}(x, c)\, dx$$

$$= \left[\left(1-x^2\right)\frac{\partial F}{\partial x} R_k^{m,n}(x, c)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left\{R_k^{m,n}(x, c)\right\} dx$$

(प्रथम समाकल को खंडशः समाकलित करने पर)

$$-\int_{-1}^{1}\left[\left\{\frac{m^2}{2(1-x)}+\frac{n^2}{2(1+x)}+c^2x^2\right\}F(x)\right]R_k^{m,n}(x,c)\,dx$$

$$=\left[\left(1-x^2\right)\frac{\partial F}{\partial x}R_k^{m,n}(x,c)-\left(1-x^2\right)\frac{\partial}{\partial x}\left\{R_k^{m,n}(x,c)\right\}F(x)\right]_{-1}^{1}$$

$$+\int_{-1}^{1}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(1-x^2\right)\frac{\partial}{dx}R_k^{m,n}(x,c)\right\}F(x)\,dx$$

$$-\int_{-1}^{1}\left[\left\{\frac{m^2}{2(1-x)}+\frac{n^2}{2(1+x)}+c^2x^2\right\}F(x)\right]R_k^{m,n}(x,c)\,dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(1-x^2\right)\frac{\partial}{\partial x}R_k^{m,n}(x,c)\right\}\right.$$

$$\left.-\left\{\frac{m^2}{2(1-x)}+\frac{n^2}{2(1+x)}+c^2x^2\right\}R_k^{m,n}(x,c)\right]F(x)\,dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\{-\lambda(c)\}\,R_k^{m,n}(x,c)\,F(x)\,dx$$

चूँकि $R_k^{m,n}(x, c)$ अवकल समीकरण (1.2) की तुष्टि करता है–

$$=-\lambda(c)\,\hat{F}_k^{m,n}(c)$$

4. सम्प्रयोग

निर्मेय का सूत्रीकरण : एक प्रत्यास्थ छड़ जिसकी प्रत्यास्थता विचरणशील है और जसकी लम्बी 2a है X– अक्ष में लेटा मान लिया गया है। यह सिरा x = – a पर क्लैम्प कर दिया गया है। इसमें बाह्य बल के कारण अनुदैर्घ्य कम्पन हो रहे हैं। कम्पनों का समीकरण नोवाकी[8] द्वारा निम्नवत् दिया हुआ है।

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(E\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+X=0 \qquad (4.1)$$

जहाँ

$u = u(x, t)$ x–अक्ष की दिशा में छड़ का विस्थापन है।

ρ = दण्ड की सामग्री का घनत्व

E = गतिज प्रत्यास्थता मोडुलस (मापांक)

X = बाह्य बल

(A) सबसे पहले हम

$$E = E_0\left(1 - h^2x^2\right) \tag{4.2}$$

$$X = E_0 h^2\left[\psi(x)f(t) - c^2h^2x^2u - \frac{m^2u}{2(1-hx)} - \frac{n^2u}{2(1+hx)}\right] \tag{4.3}$$

लेते हैं जहाँ E_0 एवं h अचर हैं, $h = \frac{1}{a}$.

प्रमेय के प्रारम्भिक तथा परिसीमा प्रतिबन्ध हैं–

$$\left.\begin{aligned} u(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0 \qquad t = 0 \text{ पर} \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0 \qquad x = -a \text{ पर क्योंकि } t \geq 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

u तथा $\frac{\partial u}{\partial x}$ $x = a$ पर सान्त रहते हैं।

प्रमेय (4.1) से (4.4) तक का हल

(4.1) में (4.2) एवं (4.3) से E तथा x के मानों को रखने पर तथा hx के स्थान पर x रखने पर

$$\frac{\rho}{E_0 h^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(1 - x^2\right)\frac{\partial u}{\partial x} - c^2x^2u - \frac{m^2u}{2(1-x} - \frac{n^2u}{2(1+x)} + \psi_1(x)f(t) \tag{4.5}$$

$$\psi_1(x) = \psi\left(\frac{x}{h}\right)$$

जिसके प्रारम्भिक तथा परिसीमा प्रतिबन्ध निम्नवत् हैं

$$\left.\begin{array}{l} u = \dfrac{\partial u}{\partial x} = o \; t = o \text{पर} \; \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \;\; x=1 \text{ पर क्योंकि } t \geq 0 \\ u \text{ तथा } \dfrac{\partial u}{\partial x} \; x = 1 \text{ पर परिमित भी सान्त बने रहते हैं} \end{array}\right\} \qquad (4.6)$$

(4.5) में रूपान्तर (3.1) का सम्प्रयोग करने पर (3.5) के कारण हमें

$$\frac{\rho}{E_0 h^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \hat{u}_k^{m,n} (c, t) \right\} = \lambda(c) \hat{u}_k^{m,n} (c, t) + \hat{\psi}_{1k}^{m,n} (c) f(t)$$

अथवा

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \hat{u}_k^{m,n} (c, t) \right\} + \frac{\lambda(c) E_0 h^2}{\rho} \hat{u}_k^{m,n} (c) + \frac{\hat{\psi}_{1k}^{m,n} (c) f(t)}{\rho / E_0 h^2}$$

$$= \frac{\hat{\psi}_1 k^{m,n} (c) f(t)}{\rho / E_0 h^2}$$

प्राप्त होता है।

माना $\dfrac{\lambda(c) E_0 h^2}{\rho} = \mu^2$

तब उपयुक्त समीकरण का रूप

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \hat{u}_k^{m,n} (c, t) \right\} + \mu^2 \hat{u}_k^{m,n} (c, t) = \frac{E_0 h^2}{\rho} \hat{\psi}_{1k}^{m,n} (c) f(t)$$

हो जाता है। लाप्लास रूपान्तर का सम्प्रयोग परिसीमा प्रतिबन्धों **(4.6)** के साथ प्रयोग करने से

$$\hat{u}_k^{m,n} (c, t) = \frac{1}{\mu} \left[\int_0^t \sin \mu (t - \upsilon) f(\upsilon) \, d\upsilon \right] \frac{E_0 h^2}{\rho} \hat{\psi}_{1k}^{m,n} (c)$$

प्राप्त होता है। (3.3) की सहायता से इसे उलटने पर, x के स्थान पर hx रखने पर हमें

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{U}_h^{m,n} (c, t) \; R_k^{m,n} (hx, c)}{M_k^{m,n} (\wp)} \qquad (4.7)$$

प्राप्त होता है। अर्थात्

$$u(x,\ t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_0 h^2 \hat{\psi}_k^{m,n}\left(\frac{x}{h}\right)}{\mu \rho M_k^{m,n}(c)} \times \left[\int_0^t \sin \mu (t - \upsilon) f(\upsilon)\, d\upsilon\right] R_k^{m,n}(hx, c)$$

n को m में बदलने तथा फलस्वरूप k को n में बदलने पर हमें बन्दना[1] के परिणाम प्राप्त होते हैं।

(B) अब हम $E = E_0\left(1 - k^2 x^2\right),\ a = \frac{1}{k}$

$$X = k_1\left\{\frac{\beta - \alpha}{h} - (\beta + \alpha)x\right\} \frac{\partial u}{\partial x} - k_1^2 c^2 k^2 x^2 u + k_1 \psi(x) f(t)$$

लेंगे जहाँ $k_1 = E_0 k_2$, E_0 तथा k अचर हैं। प्रमेय के प्रारम्भिक परिसीमा प्रतिबन्ध हैं–

$$u = \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad t = 0 \text{ पर}$$

$$u(x,\ t) = \frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x} = 0 \qquad x = -a,\ t \geq 0 \text{ पर}$$

u तथा $\frac{\partial u}{\partial x}$ $x = a$ पर सान्त रहे आते हैं।

हम $$U = (1 - kx)^{-\frac{\alpha}{2}} (1 + kx)^{-\frac{\beta}{2}} . \upsilon \qquad (4.8)$$

रखें तो

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (1 - kx)^{-\frac{\alpha}{2}} (1 + kx)^{-\frac{\beta}{2}} \times \left[\left\{\frac{\alpha k}{2(1 - kx)} - \frac{\beta k}{2(1 + kx)}\right\}\upsilon + \frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

तथा अवकल समीकरण (4.1) निम्न रूप धारण करता है–

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{(1 - kx)^{-\frac{\alpha}{2}} (1 + kx)^{-\frac{\beta}{2}} . \upsilon\right\}$$

$$= E_0\left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(1 - k^2x^2\right)\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right\}\right] . (1 - kx)^{-\frac{\alpha}{2}} (1 + kx)^{-\frac{\beta}{2}}$$

$$+ (1 - kx)^{-\frac{\alpha}{2}} (1 + kx)^{-\frac{\beta}{2}} E_0\left[\frac{\alpha k + \beta k}{2}\left(\frac{\alpha k + \beta k}{2} + h\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2 k^2}{1 - kx} + \left(\frac{\beta^2 k^2}{1 + kx}\right)\right)\right] v$$

$$- k_1 c^2 k^2 x^2 (1 - kx)^{-\frac{\alpha}{2}} (1 + kx)^{-\frac{\beta}{2}} . \upsilon + k_1 \psi(x) f(t)$$

अब

$$\psi(x) = (1 - kx)^{-\frac{\alpha}{2}} (1 + kx)^{-\frac{\beta}{2}} \psi_1(kx),\ \upsilon_1(kx, t) = v(x, t)$$

लिखने तथा बाद में kx को z में परिवर्तित करने पर हमें निम्न रूप में अवकल समीकरण प्राप्त होता है

$$\frac{\rho}{E_0 k^2} \frac{\partial^2 \upsilon_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left\{\left(1 - z^2\right)\frac{\partial \upsilon_1}{\partial z}\right\}$$

$$+ \left[\frac{\alpha + \beta}{2}\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + 1\right) - c^2 z^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{1 - z} + \frac{\beta^2}{1 + z}\right)\right]\upsilon_1 + \psi_1(z) . f(t)$$

इसी तरह

$$\int_{-1}^{1} \upsilon_1 R^{\alpha, \beta}_{r + \frac{\alpha+\beta}{2}} (z, c)\, dz = \hat{\upsilon}_1 = \hat{\upsilon}_{1_k}{}^{\alpha, \beta}_{(c)},\ \beta = r + \frac{\alpha + \beta}{2}$$

रख कर हम रूपान्तर (3.1) को प्राचलों में आवश्यक परिवर्तन करते हुए सम्प्रयुक्त करते जाते हैं–

$$\frac{\rho}{E_0 k^2} \frac{\partial^2 \hat{\upsilon}_1}{\partial t^2} = - \lambda(c)\, \hat{\upsilon}_1 + \hat{\psi}_1 . f(t),\ \hat{\psi}_1 = \hat{\psi}_{1p}^{\alpha, \beta}(c)$$

अर्थात्

$$\frac{\partial^2 \hat{\upsilon}_1}{\partial t^2} + \frac{E_0 k^2}{\rho} \lambda(c)\, \hat{\upsilon}_1 = \hat{\psi}_1 . f(t),\ \left(\frac{E_0 . k^2}{\rho}\right)$$

अब $v^2 = \frac{E_0 k^2}{\rho} \lambda(c)$ रखने पर

$$\frac{\partial^2 \hat{\upsilon}_1}{\partial t^2} + v^2 \hat{\upsilon}_1 = \frac{v^2}{\lambda(c)} \hat{\psi}_1 . f(t) \tag{4.9}$$

माना कि

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \hat{\upsilon}_1\, dt = \hat{\bar{\upsilon}}_1 \int_0^{\infty} e^{-st} . f(t) = \bar{f}(s)$$

v के लिए

$$\upsilon_1 = 0 = \frac{\partial \upsilon_1}{\partial z} \quad \text{पर} \quad z = -1,\ t \geq 0$$

$$\upsilon_1 = 0 = \frac{\partial \upsilon_1}{\partial t} \quad \text{पर} \quad t = 0$$

υ_1 तथा $\frac{\partial \upsilon_1}{\partial z}$ z = 1 पर सान्त होते हैं।

(4.9) में लाप्लास रूपान्तर का सम्प्रयेग करने पर

$$\hat{\bar{\upsilon}}_1 \left(s^2 + \nu^2\right) = \frac{\nu^2}{\lambda}\ \hat{\psi}_1 \cdot \bar{f}(s)$$

अथवा

$$\hat{\bar{\upsilon}}_1 = \frac{\nu^2}{\lambda}\ \hat{\psi}_1 \cdot \frac{\bar{f}(s)}{s^2 + \nu^2}.$$

प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तर देता है

$$\hat{\upsilon}_1 = \frac{\nu}{\lambda} \cdot \hat{\psi}_1 \int_0^t f(\tau)\ \sin \nu\,(t-\tau)\ d\tau$$

$$\therefore\ \upsilon_1 = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\hat{\upsilon}_1}{M^{\alpha,\beta}_{r+\frac{\alpha+\beta}{2}}} \cdot R^{\alpha,\beta}_{r+\frac{\alpha+\beta}{2}}(z, c)$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\nu}{\lambda}\ \hat{\psi}_1 \int_0^t f(\tau)\ \sin \nu\,(t-\tau)\ d\tau \cdot \frac{R_p^{\alpha,\beta}(x, c)}{M_p^{\alpha,\beta}} \tag{4.10}$$

$$p = r + \frac{\alpha+\beta}{2}$$

(4-10) से हमें (2.7) तथा (4.8) सम्बन्धों की सहायता से दीक्षित[2] के परिणाम प्राप्त होते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक विश्वविद्यालय आयोग का आभारी है जिसने विद्यालयों के अवकाश प्राप्त अध्यापकों की योजना के अन्तर्गत आर्थिक सहयोग प्रदान किया।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 44, No. 3, July 2001.

चर कोटि के सर्वीकृत टोप्लिट्ज मैट्रिक्सों के लिए प्रतिलोमन सूत्र

पी० एल० सेठी तथा कु० पूनम
गणित तथा सांख्यिकी विभाग, जैनारायण विश्वविद्यालय, जोधपुर (राज०)

[प्राप्त — जनवरी 30, 2001]

सारांश

चर कोटि के अपरिमित मैट्रिक्सों की एक श्रेणी के लिए प्रतिलोमन सूत्र प्राप्त किये गये हैं जिसमें परिमित टोप्लिट्ज मैट्रिक्स के समान विस्थापन संरचना होती हैं। इसके फलस्वरूप चर कोटि के अपरिमित टोप्लिट्ज धन हैंकल मैट्रिक्सों के संमित प्रतिलोमन प्रतीक सूत्र प्राप्त होते हैं।

Abstract

Inversion formulas for infinite generalized Toeplitz matrices of variable order. *By* P. L. Sethi and Km. Poonam, Department of Mathematics and Statistics, Jai Narain Vyas University, Jodhpur (Rajasthan.).

Inversion formulas are obtained for a certain class of infinite matrices of variable order that possess displacement structure similar to that of finite block Toeplitz Matrices of variable order. Consequences are symmetric inversion formulas for infinite Toeplitz plus Hankel Matrices of variable order.

1. प्रस्तावना

यह शोधपत्र एलिस तथा गोहबर्ग[1] द्वारा दिये गये अपरिमित सार्वीकृत टोप्लिट्स मैट्रिक्सों के लिए प्रतिलोमन सूत्रों का सार्वीकरण हैं। इस प्रपत्र में मैट्रिक्स समष्टि यूक्लिड का समष्टि $m \times m$ संमित मैट्रिक्सों का है जिसमें $m\,(m+1)^2$ विमाएँ हैं।

$X > 0 \rightarrow p \times p$ मैट्रिक्स x धन परिमित मैट्रिक्स है

$X > Y \rightarrow X - Y$ धन परिमित मैट्रिक्स है

$0 < X < A \rightarrow X > 0$ तथा $A - X > 0.$

$X \geq 0 \rightarrow$ मैट्रिक्स × धन अर्ध परिमित है

$X > 0 \rightarrow$ मैट्रिक्स × ऋण परिमित है

$X \leq 0 \rightarrow$ मैट्रिक्स × ऋण अर्ध परिमित है

जो मैट्रिक्स उपर्युक्त श्रेणियों में से किसी में नहीं आता वह अपरिमित मैट्रिक्स कहलाता है। रिक्त मैट्रिक्स को भी 0 द्वारा प्रदर्शित करते हैं तथा तत्समक मैट्रिक्स को I द्वारा।

$1 \times 1 = X$ का सारणिक = det X

$tr\, X = X$ का लेश $= X_{11} + X_{22} + \ldots + X_{mm}.$

$$= \lambda_1 + \ldots + \lambda_m$$

जहाँ

$\lambda_1, \ldots \lambda_m$ X के आइगेम मान हैं।

ऐसे मैट्रिक्स जिनके मूलतत्व गणितीय चर या यादृच्छिक चर हैं उन्हें यथासम्भव बड़े अक्षरों **X, Y, ...** द्वारा प्रदर्शित किया जावेगा। जब ऐसे मैट्रिक्स, जहाँ मूलतत्व अदिश स्वतन्त्र हैं, अर्थात् कोई भी मूलतत्व अन्य मूलतत्वों का तब तक फलन नहीं है जब तक निश्चितता, नियमितता न हो। इस प्रकार m × m असंमित मैट्रिक्स **X,** अर्थात् $X = X' > 0$, जहाँ प्राइम से परिवर्त सूचित होता है जिसमें $1 + 2 + \ldots + m = m(m+1)/2$ चर होता है। हम 2 × 2 खण्ड मैट्रिक्सों का अध्ययन करते हैं जिसमें मुख्य विकर्ण में चार कोटि के प्रविष्टियाँ एकदिशीय अपरिमित खंड टोप्लिट्ज मैट्रिक्स तथा द्वितीयक विकर्ण प्रविष्टियों में चर क्रम के एकदिशीय अपरिमित खंड हैंकल मैट्रिक्स हैं।

इस प्रपत्र के प्रथम खण्ड में चर कोटि के मैट्रिक्सों की विस्थापन संरचना है, द्वितीय खण्ड में प्रतिलोमन सूत्र प्राप्त करके विशिष्ट दशाओं की विवेचना की गई है तथा अन्तिम खण्ड में अपरिमित टोप्लिट्ज धन हैंकल मैट्रिक्सों के व्युत्क्रम के लिए सूत्र निकाले गये हैं।

2. चर कोटि के विस्थापन मैट्रिक्सों से सम्बन्ध विस्थापन

इस अनुभाग में हम विस्थापन आपरेटर की खोज करेंगे जो चर कोटि

$$S(x) = \begin{pmatrix} s(x) & 0 \\ 0 & s_T(x) \end{pmatrix} \quad \text{तथा} \quad S^T(x) = \begin{pmatrix} s(x) & 0 \\ 0 & s_T^T(x) \end{pmatrix}$$

के खंड विस्थापन मैट्रिक्सों से सम्बद्ध है जहाँ T के नीचे लिखे अंक मुख्य विकर्ण तथा

$$S(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ I & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & I & \cdots \\ . & . & . & \cdots \end{pmatrix} \quad \text{तथा} \quad S_T(x) = \begin{pmatrix} \cdots & . & . & . \\ \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & I & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & I & 0 \end{pmatrix}$$

के प्रति खंड परिवर्त को बताते हैं जहाँ I m × m तत्समक मैट्रिक्स है।

चर कोटि के परिमित खंड टोप्लिट्ज मैट्रिक्सों के लिए विस्थापन सिद्धान्त तथा उसके विकास की भूमिका के लिए निर्देश[4] देखें।

चर कोटि S (x) के मैट्रिक्स को किसी भी सदिश में प्रयुक्त किया जा सकता है जिसका रूप

$$S(x) = \begin{pmatrix} a(x) \\ b(x) \end{pmatrix}$$

जहाँ a (x) तथा b (x) का रूप

$$a(x) = \begin{pmatrix} \alpha_0(x) \\ \alpha_1(x) \\ \alpha_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{तथा} \quad b(x) = \begin{pmatrix} \vdots \\ \beta_{-2}(x) \\ \beta_{-1}(x) \\ \beta_0(x) \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

है जहाँ $\alpha_0(x)$, $\alpha_1(x)$, ... तथा $\beta_0(x)$, $\beta_{-1}(x)$ ... चर कोटि के संमिश्र मैट्रिक्स $m \times m$ हैं।

इस तरह S (x) अपरिमित अनुक्रम है अग्र खंड विस्थापक आपरेटर का, जो परिमित खंड सदिशों

$$A(x) = \begin{pmatrix} A_{11}(x) & A_{12}(x) \\ A_{21}(x) & A_{22}(x) \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

पर है जहाँ

$$A_{11}(x) = \begin{pmatrix} a_{00}(x) & a_{01}(x) & a_{02}(x) & \cdots \\ a_{10}(x) & a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots \\ a_{20}(x) & a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots \\ . & . & . & \cdots \end{pmatrix}, \quad A_{12}(x) = \begin{pmatrix} \cdots & b_{02}(x) & b_{01}(x) & b_{00}(x) \\ \cdots & b_{12}(x) & b_{11}(x) & b_{10}(x) \\ \cdots & b_{22}(x) & b_{21}(x) & b_{20}(x) \\ \cdots & . & . & . \end{pmatrix}$$

$$A_{21}(x) = \begin{pmatrix} . & . & . & \cdots \\ c_{20}(x) & c_{21}(x) & c_{22}(x) & \cdots \\ c_{10}(x) & c_{11}(x) & c_{12}(x) & \cdots \\ c_{00}(x) & c_{01}(x) & c_{02}(x) & \cdots \end{pmatrix}, \quad A_{22}(x) = \begin{pmatrix} \cdots & . & . & . \\ \cdots & d_{22}(x) & d_{21}(x) & d_{20}(x) \\ \cdots & d_{12}(x) & d_{11}(x) & d_{10}(x) \\ \cdots & d_{02}(x) & d_{01}(x) & d_{00}(x) \end{pmatrix}$$

इस बिन्दु पर A को बीजीय वस्तु माना जाता है जिसकी प्रविष्टियों के लिये कोई अभिसरण गुण नहीं है। (2.1) के रूप में समस्त मैट्रिक्सों का सेट (समुच्चय) m × m मैट्रिक्सों के बीजगणित पर माड्यूल M है। S (x) से सम्बद्ध विस्थापन आपरेटर को

$$\nabla_{s(x)}(A(x)) = A(x) - S(x)A(x)S^T(x)$$

द्वारा परिभाषित किया जाता है।

यह पहले से प्रमाणित है कि $\nabla_{s(x)} M$ की मोड्यूल आकृतिकता है। प्रथम प्रमेय में हम $\nabla_{s(x)}$ की अष्टि ज्ञात करते हैं–

प्रमेय 2.1 : माना कि A (x) रूप (2.1) में स्वेच्छ मैट्रिक्स है

$$\nabla_{s(x)}(A(x)) = 0$$

iff $A_{11}(x)$, $A_{12}(x)$ तथा $A_{21}(x)$ शून्य हैं तथा $A_{22}(x)$ खंड टोप्लिट्ज है।

उपपत्ति : माना कि

$$A(x) = \begin{pmatrix} A_{11}(x) & A_{12}(x) \\ A_{21}(x) & A_{22}(x) \end{pmatrix}$$

तो

$$\nabla_{s(x)}(A(x)) = A(x) - S(x)A(x)S^T(x)$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}(x) & A_{12}(x) \\ A_{21}(x) & A_{22}(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} S(x) & 0 \\ 0 & S_T(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}(x) & A_{12}(x) \\ A_{21}(x) & A_{22}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^T(x) & 0 \\ 0 & S_T(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}(x) - S(x)\,A_{11}(x)_s S^T(x) & A_{12}(x) - S(x)\,A_{12}(x)S_T^T(x) \\ A_{21}(x) - S(x)\,A_{21}(x)S^T(x) & A_{22}(x) - S(x)\,A_{22}(x)S_T^T(x) \end{pmatrix}$$

इसलिए $\nabla_{s(x)}(A(x)) = 0$ यदि और केवल यदि

$$A_{11}(x) - S(x)\, A_{11}(x) S^T(x) = 0, \quad A_{12}(x) - S(x)\, A_{12}(x) S_T^T(x) = 0$$

$$A_{21}(x) - S(x)\, A_{21}(x) S^T(x) = 0, \quad A_{22}(x) - S(x)\, A_{22}(x) S_T^T(x) = 0$$

माना कि

$$A_{11}(x) = \begin{pmatrix} a_{00}(x) & a_{00}(x) & \dots \\ a_{00}(x) & a_{00}(x) & \dots \\ . & . & \dots \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

तो

$$S(x) A_{11}(x) S_T^T(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_{00}(x) & a_{00}(x) & \dots \\ 0 & a_{00}(x) & a_{00}(x) & \dots \\ . & . & . & \dots \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

(2.3) तथा (2.4) से यह निकलता है कि $A_{11}(x) - S(x) A_{11}(x) S^T(x) = 0$ iff $A_{11}(x) = 0$. इसी तरह से $A_{12}(x) - S(x) A_{12}(x) S_T^T(x) = 0$ iff $A_{12}(x) = 0 A_{21}(x) - S(x) A_{21}(x) S^T(x) = 0$ $A_{21}(x) = 0$.

माना कि

$$A_{22}(x) = \begin{pmatrix} \dots & . & . \\ \dots & d_{11}(x) & d_{10}(x) \\ \dots & d_{01}(x) & d_{00}(x) \end{pmatrix}$$

तब

$$S_T(x) A_{22}(x) S_T^T(x) = \begin{pmatrix} \dots & . & . & . \\ \dots & d_{33}(x) & d_{32}(x) & d_{31}(x) \\ \dots & d_{23}(x) & d_{22}(x) & d_{21}(x) \\ \dots & d_{13}(x) & d_{12}(x) & d_{11}(x) \end{pmatrix}$$

इसलिए $A_{22}(x) - S(x) A_{22}(x) S_T^T(x) = 0$ $b_{jk}(x) = b_{j+1,k+1}(x)$ समस्त J के लिए, $k \geq 0$ का अर्थ है कि $A_{22}(x)$ खंड टोप्लिट्ज है। इस तरह प्रमेय सिद्ध हुआ

3. प्रतिलोमन सूत्र

इस अनुभाग के प्राथमिक परिणाम हैं चर कोटि के कतिपय सर्वीकृत अपरिमित खंड टोप्लिट्ज के लिए प्रतिलोमन सूत्र हैं। इन मैट्रिक्सों की पहचान के लिए हम मानेंगे कि g (x), h (x), u(x) तथा (v x)

वीनर बीजगणित $W^{m\times m}(T(x))$ के फलन हैं, m × m मैट्रिक्स मान वाले फलन इकाई वृत्त पर परम अभिसारी फूरियर श्रेणी सहित। $W^{m\times m}(T(x))$ में फलन u को

$$u(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k z^k \quad (z \in T(x))$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} ||u_k|| < \infty$$

द्वारा दिया जाता है।

u(x) से सम्बद्ध परिमित खंड टोप्लिट्ज मैट्रिक्स हैं, चर कोटि $U(x) = \left(u_{j-k}(x)\right)_{j,k=-\infty}^{\infty}$ के तथा U के ऊपरी वाम तथा दक्षिण चतुर्थांश

$$U_m(x) = \begin{pmatrix} \cdots & . & . \\ \cdots & u_0(x) & u_{-1}(x) \\ \cdots & u_1(x) & u_0(x) \end{pmatrix} \quad \text{तथा} \quad U_{tr}(x) = \begin{pmatrix} u_0(x) & u_{-1}(x) & \cdots \\ u_1(x) & u_0(x) & \cdots \\ . & . & \cdots \end{pmatrix}$$

द्वारा परिभाषित होते हैं। किसी अनृण पूर्णांक के लिए अपरिमित खंड हैंकेल मैट्रिक्स के लिए हमारे पास

$$U_n(x) = \begin{pmatrix} \cdots & u_{n+1}(x) & u_n(x) \\ \cdots & u_{n+2}(x) & u_{n+1} \\ \cdots & . & . \end{pmatrix} \quad \text{तथा} \quad U_n^T(x) = \begin{pmatrix} . & . & \cdots \\ u_{n+1}(x) & u_{n+2}(x) & \cdots \\ u_n(x) & u_{n+1}(x) & \cdots \end{pmatrix}$$

सर्वोत्तम अपरिमित खंड टोप्लिट्ज मैट्रिक्स जिन्हें व्युत्क्रमित करना है उनका रूप

$$T_n(x) = \begin{pmatrix} U_{tr}(x) & G_n(x) \\ H_n(x) & V_{ut}(x) \end{pmatrix}$$

है जिसे किसी धन पूर्णांक p के लिए अनुक्रम समष्टि $l_p^{mxm}(0, \infty) x\ l_p^{mxm}(-\infty, 0)$ में परिबद्ध आपरेटर माना जा सकता है। निम्नांकित प्रमेय की उपपत्ति पिछले अनुभाग के प्रतिस्थापन सिद्धान्त पर आधारित है।

प्रमेय 3.1 : माना कि $g(x)$, $h(x)$, $u(x)$ एवं $v(x)$ फलन है $W^{m\times m}(T(x))$ में तथा माना कि $1 \le p \le \infty$। कल्पना करें कि $U_{tr}(x)$ एवं $V_{ut}(x)$ क्रमशः $l_p^{mxm}(0, \infty) x\ l_p^{mxm}(-\infty, 0)$ पर व्युत्क्रमणीय हैं तो To व्युत्क्रमणीय है $l_p^{mxm}(0, \infty) x\ l_p^{mxm}(-\infty, 0)$ पर यदि और केवल यदि समीकरण

$$T_0\begin{pmatrix} a(x) \\ b(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(p^T(x)\, q^T(x)\right) T_0 = \left(e_1^T\ 0\right) \qquad (3.1)$$

का हल $l_p^{mxm}(0, \infty) x\ l_p^{mxm}(-\infty, 0)$ में $\alpha_0(x)$, $\pi_0(x)$ व्युत्क्रमणीय हो तथा $\delta_0(x)$, $\sigma_0(x)$ व्युत्क्रमणीय है। यहाँ $\alpha_0(x)$, $\pi_0(x)$ $\delta_0(x)$, $\sigma_0(x)$ प्रथम प्रविष्टियाँ हैं $a(x)$, $p(x)$, $d(x)$ एवं s (x) में जब **(3.1)** का ऐसा हल विद्यमान हो तो To का व्युत्क्रम निम्नवत् प्राप्त किया जा सकता है

$$E(x) = L_1(x)\,\alpha_0^{-1}(x)\,L_2^T(x) - L_3(x)\,\delta_0^{-1}(x)\,L_4^T(x) \qquad (3.2)$$

जहाँ $L_1(x)$, $L_2(x)$ $L_3(x)$ एवं $L_4(x)$ को

$$L_1(x) = \begin{pmatrix} L(a(x)) & 0 \\ H(b(x))^T & L(a(x))_T \end{pmatrix}, \quad L_2(x) = \begin{pmatrix} L(p(x)) & 0 \\ H(q(x))^T & L(p(x))_T \end{pmatrix}$$

$$L_3(x) = \begin{pmatrix} L(c(x)) & 0 \\ H(d(x))^T & L(c(x))_T \end{pmatrix}, \quad L_4(x) = \begin{pmatrix} L(t(x)) & 0 \\ H(s(x))^T & L(t(x))_T \end{pmatrix}$$

से व्यक्त किया जाता है। **E (x)** को भी उसी खंड रूप में लिखते हैं–

$$E(x) = \begin{pmatrix} E_{11}(x) & E_{12}(x) \\ E_{21}(x) & E_{22}(x) \end{pmatrix}$$

उपपत्ति : कल्पना करें कि ऐसे हल (3.1) हैं। सर्वप्रथम हम सिद्ध करेंगे कि To (x) एक-के-प्रति-एक है $l_p^{mxm}(0, \infty) x\ l_p^{mxm}(-\infty, 0)$ पर, प्रेरण द्वारा सिद्ध करने पर कि

$$T_0\begin{pmatrix} X(x) \\ Y(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (3.3)$$

तो प्रति अनृण पूर्णांक $k, X_0, \ldots, X_k$ तथा $Y_0, \ldots, Y_k = 0$ हैं। **(3.3)** के वामपक्ष में $(P^T(x)\, q^T(x))$ से गुणा करने तथा प्रमेय **(3.1)** में तृतीय समीकरण का उपयोग करने पर हम देखते हैं कि $X_0(x) = 0$, $Y_0(x) = 0$। अब कल्पना करें कि $k > 0$ तथा $X_0, \ldots, X_{k-1}$ तथा $Y_0, \ldots, Y_{k-1} = 0$ शून्य है।

माना कि

$$X'(x) = \left(0,\ X_0(x),\ X_1\ \ldots\right)^T \text{ तथा } \quad Y'(x) = \left(\ldots,\ Y_{-2}(x),\ Y_1(x)\right)^T$$

चूँकि $Y_0(x) = 0$, **(3.3)** का अर्थ होगा कि–

$$T_0\begin{pmatrix} X'(x) \\ Y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda(x)$$

जहाँ

$$\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{-k-1}(x) X_k(x) + \sum_{j=0}^{\infty} g_j(x) Y_{-j-1}(x)$$

विभाजन To (x) का स्वरूप

$$T_0(x) = \begin{pmatrix} u_0(x) & \chi^T(x) \\ \xi(x) & T_1(x) \end{pmatrix}$$

है जहाँ

$$\chi^T(x) = \left(\chi_1^T(x),\ \chi_2^T(x)\right) \text{ तथा } \xi^T(x) = \left(\xi_1^T(x),\ \xi_2^T(x)\right)$$

$$\chi_1^T(x) = \left(u_{-1}(x),\ u_{-2}(x), \ldots\right) \text{ तथा } \chi_2^T(x) = \left(\ldots,\ g_1(x),\ g_0(x)\right)$$

$$\xi_1^T(x) = \left(u_1(x),\ u_2(x), \ldots\right) \text{ तथा } \xi_2^T(x) = \left(\ldots,\ h_1(x),\ h_0(x)\right)$$

इसके संगत हम लिखते हैं

$$\begin{pmatrix} p(x) \\ q(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_0(x) \\ y(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0(x) \\ y(x) \end{pmatrix} \text{ तथा } \begin{pmatrix} X'(x) \\ Y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(x)\ 0 \\ h(x) \end{pmatrix}$$

जहाँ

$$Y(x) = \begin{pmatrix} Y_1(x) \\ q(x) \end{pmatrix} \text{ तथा } h(x) = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ Y'(x) \end{pmatrix}$$

साथ ही

$$Y_1(x) = \left(\pi_1(x),\ \pi_2(x),\ \ldots\right)^T \text{ तथा } h_1(x) = \left(X_0(x),\ X_1(x),\ \ldots\right)^T$$

तो

$$\begin{pmatrix} \alpha_0(x) \, Y^T(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0(x) & \chi^T(x) \\ \xi(x) & T_1(x) \end{pmatrix} = (I \; 0)$$

तथा

$$\begin{pmatrix} u_0(x) & \chi^T(x) \\ \xi(x) & T_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ h(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(x) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

जिससे यह निकलता है कि

$$\alpha_0(x) \chi^T(x) + Y^T(x) T_1(x) = 0$$

$$\chi^T(x) h(x) = \lambda(x)$$

$$T_1(x) h(x) = 0$$

इसलिए

$$\lambda(x) = \chi^T(x) h(x) = \alpha_0^{-1}(x) Y^T(x) T_1(x) h(x) = 0$$

जिससे कि

$$T_0 \begin{pmatrix} X'(x) \\ Y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

अतः आगमनिक अभिकल्पना से यह निकलता है कि $X_0, ..., X_{k-1} = 0$ तथा $Y_0, \ldots, X_{k-1} = 0$ इसलिए $T_0(x)$ एक-के-प्रति-एक है।

चूँकि g (x) एवं h (x) सम्बन्धित हैं $W^{m \times m}$ $(T(x))$ से अतः Go (x) तथा $H_0^T(x)$ के हैंकेंल आपरेटर क्रमशः l_q^{mxm} $(-\infty, 0) x$ l_q^{mxm} $(0, \infty)$ किसी **q** के लिए संहत हैं यदि $1 \leq q \leq \infty$ (गोहबर्ग तथा क्राइन[2])। गुणनखण्ड करने पर

$$T_0(x) = \begin{pmatrix} U_{tr}(x) & G_0(x) \\ H_0^T(x) & V_{ut}(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} U_{tr}(x) & 0 \\ 0 & V_{ut}(x) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I & U_{tr}^{-1}(x) G_0(x) \\ H_0^T(x) V_m^{-1}(x) & I \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

इससे यह निकलता है कि आपरेटर

$$\begin{pmatrix} I & U_{tr}^{-1}(x)\,G_0(x) \\ H_0^T(x)\,V_m^{-1}(x) & I \end{pmatrix}$$

एक-के-प्रति-एक हैं अतः $l_p^{mxm}\ (-\infty,\ 0)\, x\ l_p^{mxm}\ (0,\ \infty)$ पर व्युत्क्रमणीय हैं।

4. चर कोटि के अपरिमित खंड टोप्लिट्ज धन हैंकेल मैट्रिक्सों का प्रतिलोमन

इस अनुभाग में T (x) + H (x) रूप के मैट्रिक्सों के व्युत्क्रम के लिए सूत्र प्रस्तुत करेंगे जहाँ T(x) तथा H (x) क्रमशः चर कोटि के अपरिमित खंड टोप्लिट्ज तथा खंड हैंकेल मैट्रिक्स हैं

$$T(x) = \begin{pmatrix} t_0(x) & t_{-1}(x) & t_{-2}(x) & \dots \\ t_1(x) & t_0(x) & t_{-1}(x) & \dots \\ t_2(x) & t_1(x) & t_0(x) & \dots \\ . & . & . & \dots \end{pmatrix}$$

तथा

$$H(x) = \begin{pmatrix} h_0(x) & h_1(x) & h_2(x) & \dots \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) & \dots \\ h_2(x) & h_3(x) & h_4(x) & \dots \\ . & . & . & \dots \end{pmatrix}$$

परिमित अदिश टोप्लिट्ज धन हैंकेल मैट्रिक्सों पर हाइनिंग तथा रोस्ट[3], नेर्सेजन तथा पपोजन[5] द्वारा विचार किया गया है

प्रमेय (4.1) : माना $T(x) = (t_{j-k}(x))_{j,k\geq 0}$ एवं $H(x) = (h_{j+k}(x))_{j,k\geq 0}$ क्रमशः, चर कोटि के अपरिमित खंड टोप्लिट्ज तथा खंड हैंकेल मैट्रिक्स हैं जिनमें m × m खंड हैं। कल्पना किया कि

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\left| t_k(x) \right|\right| < \infty,\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\left| h_k(x) \right|\right| < \infty$$

T (x) परिभाषित करता है व्युत्क्रमणीय आपरेटर को l_2^{mxm} (0, ∞) पर तो $T(x) + H(x)$ एवं $T(x) - H(x)$ l_2^{mxm} (0, ∞) पर व्युत्क्रमणीय हैं यदि $f(x)$, $g(x)$, $k(x)$ एवं l_1^{mxm} (0, ∞) में l (x) हल हैं समीकरण

$$(T(x) + H(x))f(x) = e_1,\ (T(x) + H(x))\,k^T(x) = e_1^T$$

एवं

$$(T(x) - H(x))\, g(x) = e_1, \; (T(x) - H(x))\, l^T(x) = e_1^T$$

के। उस दशा में $(T(x) + H(x))^{-1}$ एवं $(T(x) - H(x))^{-1}$ को निम्नांकित रीति से प्राप्त किया जा सकता है।

माना कि

$$\begin{pmatrix} a(x) \\ b(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} f(x) + g(x) \\ R^T f(x) - R^T g(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c(x) \\ d(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} f(x) - g(x) \\ R^T f(x) + R^T g(x) \end{pmatrix}$$

तथा

$$\left(p^T(x)\; q^T(x)\right) = \frac{1}{2}\left(k^T(x) + l^T(x)\right), \; k^T(x) R + l^T(x) R$$

$$\left(r^T(x)\; s^T(x)\right) = \frac{1}{2}\left(k^T(x) - l^T(x)\right), \; k^T(x) R + l^T(x) R$$

तब

$$(T(x) + H(x))^{-1} = \frac{1}{2}\left[E_{11}(x) + RE_{21}(x) + E_{12}(x) R^T + RF_{22}(x) R^T\right]$$

तथा (4.1)

$$(T(x) - H(x))^{-1} = \frac{1}{2}\left[E_{11}(x) - RE_{21}(x) - E_{12}(x) R^T + RF_{22}(x) R^T\right] \tag{4.2}$$

जहाँ

$$E_{11}(x) = L_x(a(x))\, \alpha_0^{-1}(x)\, L_x(p(x))^T - S(x)\, L_x(c(x))\, \delta_0^{-1}(x)\, L_x(r(x))^T S^T(x)$$

$$E_{12}(x) = L_x(a(x))\, \alpha_0^{-1}(x)\, H_x(q(x))^T - S(x)\, L_x(c(x))\, \delta_0^{-1}(x)\, H_x(s_T(x))^T$$

$$E_{21}(x) = H_x(a(x))\, \alpha_0^{-1}(x)\, L_x(p(x))^T - S_T(x)\, H_x(d(x))^T \delta_0^{-1}(x)\, L_x(r(x))^T S^T(x)$$

$$E_{22}(x) = U_x(d(x))_T\, \delta_0^{-1}(x)\, U_x(s(x))_T^T - S_T^T(x)\, U_x(b(x))_T\, \alpha_0^{-1}(x)\, U_x(q(x))_T^T\, S^T(x) \tag{4.3}$$

उपपत्ति : यह देखें कि $R^T R = I$, l_2^{mxm} $(-\infty, 0)$ तथा $R R^T = I$ पर तत्समक, l_2^{mxm} $(\infty, 0)$ पर तत्समक। इन तथ्यों के प्रयोग से l_2^{mxm} $(-\infty, 0) x$ l_2^{mxm} $(0, \infty)$ पर एक आपरेटर के निम्नांकित गुणनखण्ड प्राप्त करते हैं–

$$\begin{pmatrix} T(x) + H(x) & 0 \\ 0 & t(x) - H(x) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & R \\ I & -R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T(x) & H(x)R \\ R^T H(x) & R^T T(x) R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & I \\ R^T & -R^T \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

दक्षिण पक्ष में मध्य का गुणक एक आपरेटर है l_2^{mxm} $(-\infty, 0) x$ l_2^{mxm} $(0, \infty)$ पर जो प्रमेय (3.1) के अधीन आता है क्योंकि

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & R \\ I & -R \end{pmatrix} \text{ एवं } \begin{pmatrix} I & I \\ R^T & -R^T \end{pmatrix}$$

एक दूसरे के व्युत्क्रम हैं।

इसका अर्थ हुआ कि $T(x) + H(x)$.^kg $T(x) - H(x)$ व्युत्क्रमणीय हैं यदि तथा यदि

$$\begin{pmatrix} T(x) & H(x)R \\ R^T H(x) & R^T T(x) R \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

व्युत्क्रमणीय हैं।

$U_{tr}(x) = T(x)$, $V_{ut}(x) = R^T T(x) R$, $G_0(x) = H(x) R$ तथा $H_0^T(x) = R^T H(x)$ के साथ प्रयोग करने पर प्रमेय (3.1) से (4.5) का आपरेटर व्युत्क्रमणीय है, बशर्ते प्रमेय **(3.1)** में समीकरण के l_1^{mxm} $(-\infty, 0) x$ l_1^{mxm} $(0, \infty)$ के हल $\alpha_0(x) = \pi_0(x)$ व्युत्क्रमणीय हैं तथा $\delta_0(x) = \sigma_0(x)$ व्युत्क्रमणीय है। इसे सिद्ध करने के लिए

$$\begin{pmatrix} 0 & R \\ R^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T(x) & H(x)R \\ R^T H(x) & R^T T(x) R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & R \\ R^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(x) & H(x)R \\ R^T H(x) & R^T T(x) R \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & R \\ R^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & R \\ R^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \text{ एवं } \begin{pmatrix} 0 & R \\ R^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{e}_1 \end{pmatrix}$$

इस पर a (x) तथा b (x) हल हैं प्रमेय (3.1) में प्रथम समीकरण के तो

$$\begin{pmatrix} T(x) & H(x)R \\ R^T H(x) & R^T T(x) R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & R \\ R^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(x) \\ b(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{e}_1 \end{pmatrix}$$

अब कल्पना करें कि समीकरण

$$(T(x) - H(x))\, g(x) = e_1, \ (T(x) - H(x))\, l^T(x) = e_1^T$$

के हल f (x) तथा g (x) हैं। माना कि

$$a(x) = \frac{1}{2}\,(f(x) + g(x)) \text{ एवं } b(x) = \frac{1}{2}\left(R^T f(x) + R^T g(x)\right)$$

तो $$\begin{pmatrix} T(x) & H(x)R \\ R^T H(x) & R^T T(x) R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(x) \\ b(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} T(x) & H(x)R \\ R^T H(x) & R^T T(x) R \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & I \\ R^T & -R^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} T(x) + H(x) & T(x) - H(x) \\ R^T (T(x) + H(x)) & -R^T (T(x) - H(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

यह प्रमेय (3.1) की सहायता से व्युत्क्रमणीय है। इसका अर्थ है कि (4.4) में चारों मैट्रिक्स व्युत्क्रमणीय हैं। इसके बाद भी,

$$\begin{pmatrix} (T(x) + H(x))^{-1} & 0 \\ 0 & (T(x) - H(x))^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & R \\ I & -R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(x) & H(x)R \\ R^T H(x) & R^T T(x) R \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I & I \\ R^T & -R^T \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & R \\ I & -R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{11}(x) & E_{12}(x) \\ E_{21}(x) & E_{22}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I \\ R^T & -R^T \end{pmatrix}$$

जहाँ $E_{11}(x)$, $E_{12}(x)$, $E_{21}(x)$ तथा $F_{22}(x)$ को (4.3) से सूचित करते हैं। इससे (4.1) तथा (4.2) सूत्र तुरन्त प्राप्त होते हैं।

निर्देश

1. एलिस, आर० एल तथा गोहबर्ग, आई० : Functional Analysis, 1992, 109, 155-198.

2. गोहबर्ग, आई० तथा काइन, एम० जी० : Amer. Math. Soc. (Transl. 1960, series 2) 14, 217-287.

3. हाइनिंग, जी० तथा रोस्ट, के० : Algebraic Method for Toeplitz - like Matrices and Operators Theory, Advances and Applications–V-13, Birkhliset Verlag, Basel, (1984).

4. कैलथ, टी० तथा सैयद, एच० ए० : Siam Review, 1995, 34, 297-386.

5. नेर्सेस्जन, ए० बी० तथा पपोजन, ए० ए० : Izv. AnArm. SSR, 1983, 18, 2, 150-150.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 44, No. 3, July 2001.

राजस्थान में काली पूँछी के नेवले *(हरपेस्टीज स्मिथाई)* का वितरण

सतीश कुमार शर्मा
क्षेत्रीय वन अधिकारी (वन्य जीव), फुलवारी वन्य जीव अभयारण्य, कोटडा
जिला — उदयपुर (राज०)

[प्राप्त — फरवरी 9, 2001]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में राजस्थान में काली पूंछ के नेवले के वितरण की जानकारी दी गई है। यह प्रजाति अरावली एवं विंध्याचल के सघन वन क्षेत्रों में फैली हुई है। यह थार के रेगिस्तानी भाग में अनुपस्थित है।

Abstract

Distribution of Ruddy Mongoose (*Herpestes smithi*) in Rajasthan. By Satish Kumar Sharma, Range Forest Officer (wildlife), Phulwari Wildlife Sanctuary, Kota, Dist. Udaipur (Raj.).

In the present paper, an account has been given about the distribution of the Ruddy Mongoose in Rajasthan. This species is distributed in the dense forest pockets of Aravalllis and Vindhyanan Mountains. It is absent from Thar desert.

राजस्थान में छोटा भारतीय नेवला (Small Indian Monogose-*Herpestes auropunctatus*) एवं सामान्य नेवला (Common Mongoose-*H. edwardsi*) नामक नेवलों की ऐसी दो प्रजातियाँ हैं जो आम तौर पर बार-बार नजर आती हैं। ये अपेक्षाकृत खुले क्षेत्रों की निवासी हैं। तीसरी प्रजाति काली पूंछ का नेवला (Ruddy Mongoos- *H. smithi*) भी राजस्थान में पाया जाता है। चूंकि यह मानव आबादी से दूर अपेक्षाकृत सघन वनों का निवासी है अतः कम ही नजर आता है। इसकी पूंछ का छोर काला एवं ऊपर की तरफ मुड़ा रहता है जिससे इसे आसानी से पहचाना जा सकता है। प्रेटर[1] के अनुसार काली पूंछ का नेवला दक्षिणी एवं मध्य भारत के वन क्षेत्रों का निवासी है। राजस्थान भारत के उत्तरी भाग का राज्य है एवं इस राज्य में काली पूंछ के नेवले वितरण संबंधी कोई जानकारी प्रेटर द्वारा दर्ज नहीं की गई है अतः इस राज्य के वनों में इस प्रजाति की उपस्थिति की जानकारी जुटाने हेतु यह अध्ययन किया गया जो इस प्रपत्र में प्रस्तुत किया गया है।

प्रयोगात्मक

वर्ष 1980 से 2001 तक राजस्थान में वनों में रहने के दौरान काली पूंछ के नेवलों की उपस्थिति को दर्ज किया गया है। इन वर्षों में बाघ परियोजना सरिस्का, बाघ परियोजना रणथम्भौर, कैलादेवी अभयारण्य, नाहरगढ़ अभयारण्य, जमवारामगढ़ अभयारण्य, रावली टाटगढ़ अभयारण्य, कुंभलगढ़ अभयारण्य, फुलवारी अभयारण्य, सज्जनगढ़ अभयारण्य, सीतामाता अभयारण्य, बाघदरा बंद क्षेत्र, मरु राष्ट्रीय उद्यान, माचिया सफारी पार्क, बर्डोद बंद क्षेत्र, कोटा शहर के पास भीतरिया कुण्ड उद्यान से पश्चिम दिशा में चम्बल नदी के किनारे के वन क्षेत्र, केवला देव राष्ट्रीय उद्यान एवं अनेकों रक्षित एवं आरक्षित वन खण्डों में समय-समय पर सर्वे किया गया। इस कार्य में वन विभाग के फील्ड स्टाफ, स्वयंसेवी संस्थाएँ, वन सुरक्षा समितियों एवं परिस्थितिकी विकास समितियों के सदस्यों की मदद ली गई।

दक्षिण अरावली के आदिवासी काली पूंछ के नेवले को **भूंदरा** नाम से जानते हैं जबकि अन्य नेवलों को **नौल्या** या **नौलिया** नाम से पुकारते हैं। मध्य तथा उत्तर अरावली एवं विंध्याचल क्षेत्रों में इसे **नौलिया** या **नेवला** नाम से ही जाना जाता है।

सर्वे के दौरान यह पाया गया कि काली पूंछ के नेवले अरावली एवं विंध्याचल पर्वतमालाओं में स्थित सघन वन क्षेत्रों में विद्यमान हैं। इस जाति की उपस्थिति जो सारणी 1 में प्रस्तुत की गई है।

परिणाम तथा विवेचना

दिये हुए तथ्यों से स्पष्ट होता है कि काली पूंछ का नेवला अरावली पर्वतमाला में रावली टाटगढ़, कुंभलगढ़, बाघदरा, बांकी, नालसान्डोल, सज्जनगढ़, नाहरगढ़, जमवारामगढ़, सरिस्का, आबु पर्वत एवं फुलवारी में विद्यमान है। उपर्युक्त क्षेत्रों के अलावा यह प्रजाति तोरणा, कमलनाथ, तिनसारा, झांझरी सहित अनेकों रक्षित एवं आरक्षित वनखण्डों में भी देखी गयी है– यानी यह प्रजाति दक्षिण, मध्य एवं उत्तर अरावली में सभी जगह फैली हुई है। राजस्थान के दक्षिण छोर पर स्थित फुलवारी अभयारण्य के पास गुजरात राज्य के बालाराम अम्बाजी अभयारण्य में भी यह प्रजाति उपस्थित है। उत्तर अरावली सीकर, झुंझुनु व नागौर जिलों से भी होकर गुजरती है। इन जिलों में हालांकि कुछ जगह अच्छे वन हैं जैसे सीकर में हर्ष की पहाड़ियां तथा झुंझुनु में खेतड़ी-सिंघाना की पहाड़ियां आदि। इन क्षेत्रों में विस्तृत सर्वे की अभी और जरूरत है। हालांकि प्राथमिक सर्वे के दौरान काली पूंछ का नेवला यहां नहीं मिला है फिर भी यहाँ पॉकेट्स में उपयुक्त आवास की उपलब्धता के कारण इस नेवले के यहाँ मिलने की संभावना है।

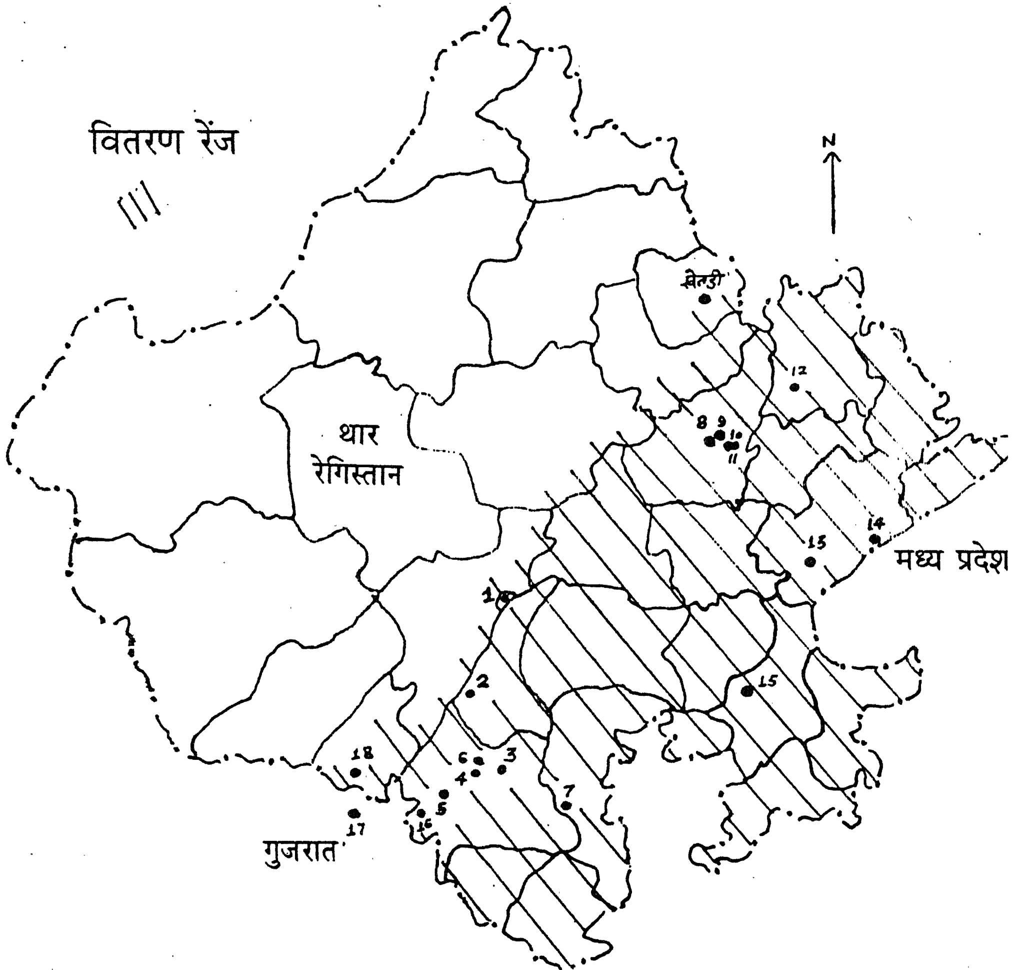
विन्ध्याचल पर्वतमाला के रणथम्भोर, कैलादेवी, चम्बल क्षेत्र एवं सीतामाता क्षेत्र में इसकी उपस्थिति उजागर हुई है। काली पूंछ का नेवला मरु राष्ट्रीय उद्यान जैसलमेर, माचिया सफारी पार्क जोधपुर, इन्दिरागांधी नहर योजना क्षेत्र में गंगानगर, सूरतगढ़, बीकानेर, जैसलमेर आदि क्षेत्रों में अनुपस्थित है। अरावली एवं विन्ध्याचल पर्वतमाला के खुले एवं अपक्षीणित (Degraded) क्षेत्रों में भी यह जाति देखने को नहीं मिली है।

सारणी 1
राजस्थान में काली पूंछ के नेवले की उपस्थिति

	वर्ष	संरक्षित क्षेत्र/क्षेत्र का नाम	जिला	देखे गये प्राणियों की संख्या*	स्थान जहाँ देखा
1.	1984	रावली टाटगढ़ अभयारण्य	अजमेर	1	जस्साखेड़ा के पास
2.	1986	कुम्भलगढ़ अभयारण्य	राजसमंद, पाली	2	राणकपुर मंदिर के पास
3.	1987	बाघदरा बंद क्षेत्र	उदयपुर	1	तालाब के पास
4.	1987	बांकी वन खण्ड	उदयपुर	2	बडी शिकार औदी के पास
5.	1993	नाल सान्डोल वनखण्ड	उदयपुर	2	नाल सान्डोल एनीकट के पास
6.	1993	सज्जनगढ़ अभयारण्य	उदयपुर	3	सज्जनगढ़ किले के पास
7.	1998	सीतामाता अभयारण्य	चित्तौड़गढ	1	भागी बावड़ी के पास
8.	1999	नाहरगढ़ अभयारण्य	जयपुर	1	मायला बाग के पास
9.	1999	नाहरगढ़ जैविक उद्यान	जयपुर	2	रामसागर बांध के पास, माजी की बावड़ी के पास
10.	1999	जमवारामगढ़ अभयारण्य	जयपुर	1	रामगढ़ बांध के पास आंधी रोड पर
11.	1999	जमवारामगढ़ अभयारण्य	जयपुर	2	बंधा नर्सरी के पास
12.	2000	बाघ परियोजना सरिस्का	अलवर	3	भानगढ़ खण्डरों के पश्चिम के नाले में
13.	2000	बाघ परियोजना रणथम्भोर	सवाई माधोपुर	2	लाहापुर रेस्ट हाउस के पूर्व में (खण्डार रेंज)
14.	2000	कैलादेवी अभयारण्य	करौली	1	कसेड गांव के पास (मँडरायल रेंज)
15.	2000	भीतरिया कुण्ड के पास पश्चिम में चंबल किनारे धौक वन में	कोटा	2	कुण्ड से 10 कि० मी० दूर पश्चिम में
16.	2001	फुलवारी अभयारण्य	उदयपुर	4	भडेर बावसी के पास 3, खांचन नाल में 1
17.	2001	बालाराम अम्बाजी स्लॉथ बीयर अभयारण्य	बनासकांठा (गुजरात)	1	कोटेश्वर महादेव के नाले में
18.	2001	आबु पर्वत अभयारण्य	सिरोही	2	छीपाबेरी चौकी के पास

* इस सारणी में प्रथम सर्वे की उपस्थिति ही दर्ज है। बाद के सर्वेक्षणों में भी यह जाति दिखती रही है।

प्रस्तुत पत्र के तथ्यों को देखने से निष्कर्ष निकलता है कि काली पूंछ का नेवला मध्य एवं दक्षिण भारत तक ही सीमित नहीं है जैसा कि प्रेटर का मत है बल्कि यह जाति उत्तर भारत में राजस्थान राज्य में अरावली पर्वतमाला एवं विन्ध्याचल पर्वतमाला में जहाँ-जहाँ सघन वन हैं वहाँ वर्तमान में फैली हुई है। सूदूर भूत में जब इन दोनों पर्वतमालाओं पर वनों का अपक्षीणन (Degradation) नहीं हुआ था तथा सघन वनों की दूर-दूर तक निरंतरता थी उस समय यह जाति भी निरन्तर वितरण में थी लेकिन अब जहाँ सघनता विद्यमान है वहाँ-वहाँ ही यह सीमित है। दक्षिण राजस्थान के बांस मिश्रित चौड़ी पत्ती के पतझड़ी वन से लेकर एवं उत्तर अरावली तथा विन्ध्यांचवल के पतझड़ी धौक वनों में यह प्रजाति समान रूप से फैलीहुई है। यह प्रजाति गुजरात स्थित अरावली क्षेत्र में भी विद्यमान है (चित्र-1)।



चित्र 1 : काली पूंछ के नेवले का राजस्थान में वितरण क्षेत्र (अंकों का वितरण सारणी अनुसार)

कृतज्ञता ज्ञापन

लेखक अध्ययन में विविध तरह से सहयोग देने के लिये आर० एस० भण्डारी, आर० जी० सोनी, एन० एल० दायमा, यू० एम० सहाय, ए० सी० चौबे, एम० एल० मीणा, वीरेन्द्र सिंह, जी० वी० रेड्डी, वाई० के० दक, भरत तैमनी, ओ० सी० चन्देल, आर० एस० शेखावत, राहुल भटनागर, राजीव जुगतावत, मनीराम पूनिया, तेजवीर सिंह, लालसिंह, बी० एम० शर्मा, एल० पी० शर्मा, सुदर्शन शर्मा, देवीशरण शर्मा, एन० एम० पटेल, एन० जे० पटेल, आई० आई० नागौरी, दिनेश त्रिपाठी, आनन्द अग्निहोत्री, वी० एस० राणा, रामवातार शर्मा, पी० एस० चुण्डावत, दलपत सिंह राजपुरोहित, हरेन्द्रसिंह सोलंकी, सुरेन्द्र सिंह धाकड़, दौलत सिंह, उदयराम, सोहनलाल सैनी, राकेश व्याय, जीवन सिंह, महेशपाल सिंह, पूराराम, कालूलाल पारगी का आभारी है।

निर्देश

1. प्रेटर, एस० एच० : द बुक ऑफ इंडियन एनिमल्स, बाम्बे नेचुरल हिस्ट्री सोसाइटी (1980)

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 44, No. 3, July 2001.

Cu^{+2}/L-आर्जिनीन संकुल के इलेक्ट्रान प्रचक्रण अनुनाद का अध्ययन

एम० पी० यादव तथा राम कृपाल
भौतिकी विभाग इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त — फरवरी 9, 2001]

सारांश

Cu^{+2}/L-आर्जिनीन संकुल का इलेक्ट्रान प्रचक्रण अनुनाद वर्णक्रम का पाउडर, ग्लास एवं घोल अवस्थाओं में अध्ययन किया गया। सम्बन्धित विभिन्न चुम्बकीय प्राचलों की गणना की गयी तथा उनकी सहायता से बन्धीय प्राचलों के मानों को निकाला गया। रेखिल विस्तृति (अति सूक्ष्म) की व्याख्या की विल्सन सिद्धान्त की सहायता से की गयी है।

Abstract

E. S. R. study of Cu^{+2}/L-arginine complexes. By M. P. Yadav and Ram Kripal, Department of Physics, University of Allahabad.

E. S. R. spectra of Cu^{+2}/L arginine complex has been studied in three phases—powder, glass and solution. With the help of spectra, various magnetic parameters as well as bonding parameters have computed. They have been interpreted on the basis of Kivelson's theory.

किसी क्रिस्टल के इलेक्ट्रान प्रचक्रण अनुनाद के अध्ययन द्वारा अनुचुम्बकीय आयन संकुलों के बन्ध तथा इलेक्ट्रान तरंग फलनों के बारे में जानकारी प्राप्त की जा सकती है। न्यूबल[1], किविल्सन तथा न्यूमैन[2]ने अपने अध्ययनों में Cu^{+2} संकुलों के पाउडर, ग्लास तथा घोल अवस्था के हैमिल्टोनियन प्राचलों, बन्धीय प्राचलों तथा रेखिल विस्तृति आदि की गणना के प्रयास किए। यहाँ पर उपर्युक्त प्राचलों के साथ अवशोषण अध्ययन के द्वारा अधिक रोचक तथा उपयोगी जानकारी देने की कोशिश की गयी है। इस प्रकार के अध्ययन के प्रयास वैज्ञानिकों[3, 4] के द्वारा समय-समय पर किए जाते

रहे हैं। यहाँ पर Cu^{+2}/L–आर्जिनीन के इलेक्ट्रान प्रचक्रण अनुनाद (E.S.R.) के साथ विभिन्न प्राचलों का सैद्धान्तिक एवं प्रायोगिक अध्ययन करके कुछ रोचक निष्कर्ष निकाले गये हैं।

प्रस्तुत प्रपत्र में जितने भी प्रेक्षण हैं वे सब एक दूसरे के पूरक हैं। E.S.R. अध्ययन अधिकांशतः तनु चुम्बकीय (Magnetically dilute) नमूनों का किया जाता है। परन्तु बहुधा ऐसा उपयुक्त नमूना खोज पाना दुरूह होता है। दूसरे, बहु क्रिस्टलीय या ग्लास नमूनों के अध्ययन में बहुत ही लगन एवं परिश्रम की आवश्यकता होती है। यहाँ पर Cu^{+2}/L-आर्जिनीन नमूनों का तीन अवस्थाओं (क्रिस्टलीय, ग्लास तथा घोल)[5, 6] में विभिन्न रेखिल विस्तृति सिद्धान्तों के प्रयोग द्वारा अनेक रेखिल विस्तृति प्राचलों को ज्ञात किया गया है तथा संकुल के प्रकाशकीय अवशोषण के अध्ययन से उसकी संमिति को निश्चित किया गया है। अनुचुम्बकीय आयन की मूल अवस्था के E.S.R. वर्णक्रम का व्यापक अध्ययन किया गया है।

प्रयोगात्मक

सिद्धान्त

यहाँ पर उन आयन संकुलों के बारे में अध्ययन किया जा रहा है जिनकी संमिति D_{4h} है तथा 2s, $2p_x$, $3p_y$ और $3p_z$ कक्षक में से प्रत्येक चार कापर के मध्य आयन के 3d कक्षक के साथ आणविक कक्षक बनाते हैं। यदि चार लीगैंडों को $\pm x$ तथा $\pm y$ अक्षों में रखा जाय और उसमें उपरिलिपि $+x$ में 1 से प्रारम्भ कर अंकित किया जाय एवं दक्षिणावर्ती दिशा में आगे बढ़ाया जाय तब आणविक कक्षक का निर्माण होता है। इससे सम्बन्धित गणितीय व्यंजक समतल की अवस्था में α तथा σ बन्ध के पदों में एवं तल से बाह्य अवस्था में β तथा β_1 बन्ध के रूप[7] में व्यक्त किया जाता है।

यदि $\alpha = 1$ तो बन्ध पूर्णतया आयनिक होते हैं।

यदि $\alpha = 0.5$ तो बन्ध पूर्णतया सह-संयोजक होते हैं।

D_{4h} सममिति में Cu^{+2} के लिए चक्रण हैमिल्टोनियन निम्न रूप में लिखा जाता है—

$$H = \beta_0 (g_{11} H_z S_z + g_{\perp} H_x S_x)$$

राबर्ट्स तथा कॉस्की[3] ने बन्धीय प्राचलों α, β, α' तथा β_1 एवं इलेक्ट्रान प्रचक्रण अनुनाद प्राचलों $g_{11}\, g_{\perp}\, A_{11}\, A_{\perp}$ में सम्बन्ध स्थापित किए हैं। उपर्युक्त की सहायता से बन्धीय प्राचलों α, β, α' तथा β_1 का मान आसानी से ज्ञात किया जा सकता है।

कुवों तथा तोमिता के सूत्रों की सहायता से विल्सन ने अत्यधिक तनु विलयनों के लिए रेखिल विस्तृति का सिद्धान्त प्रतिपादित किया।

$$H_{Spin} = H^0 + H^1 + F(t)$$

$$H^0 = g_0 \beta_0 S_z H$$

$$H' = \hbar a I'_z + \frac{1}{2} a\hbar [I' S^- - I^- S^+]$$

$$g_0 = \frac{1}{3}(g_x + g_y + g_z)$$

$$a = \frac{1}{3}(A_x + A_y + A_z)$$

रेखिल विस्तृति के लिए

$$\Delta H = \frac{2\hbar}{\sqrt{3}\, g_0 \beta_0} T_2^{-1}$$

जहाँ

$$T_2^{-1} = A \pm BM + CM^2 + DM^3$$

A B C F, Cu^{+2} संकुलों के लिए रेखिल विस्तृति प्राचल हैं। हबार्ड सिद्धान्त की सहायता से एटकिन्स तथा किविल्सन[8] रेखिल विस्तृति के लिए निम्नलिखित व्यंजक प्राप्त किए

$$\alpha_{RS} = \frac{2\hbar}{\sqrt{3}\, \beta_0 g_0} \frac{1}{12\pi \gamma^3} (\Delta g_{11}^2 + 2g\perp^2) \frac{kT}{\eta}$$

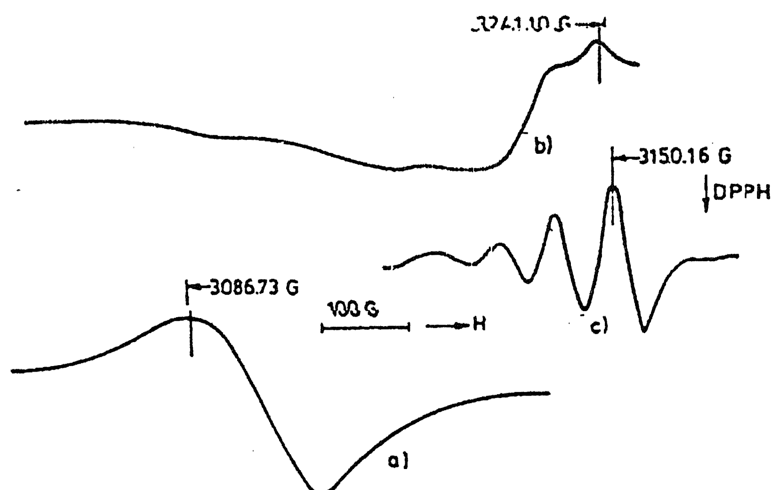
परिणाम तथा विवेचना

Cu^{+2}/L-आर्जिनीन क्रिस्टल के वर्णक्रम के अध्ययन की सहायता से पाउडर, ग्लास एवं घोल के लिए विभिन्न प्राचलों का मान निम्नवत् प्राप्त होता है।

g_{11}	$g_{\perp}$	Δg	g	g_{av}	G	ΔH_{pp}
बहुक्रिस्टलीय या पाउडर अवस्था						
2.160	2.063	0.097	2.095	2.124	4.2	14.563
ग्लास अवस्था						
2.252	2.060	0.192	2.124	2.124	4.2	—

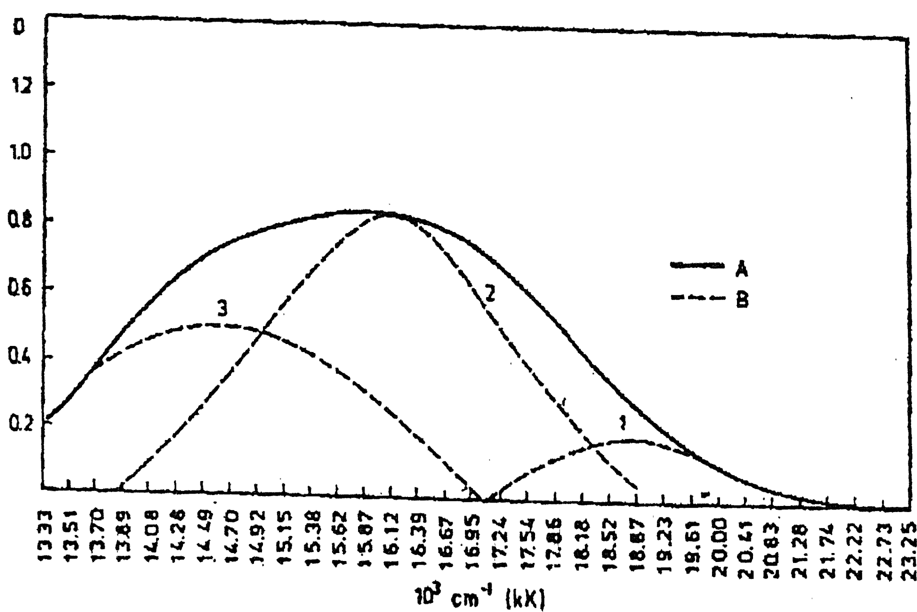
घोल अवस्था

घोल के वर्णक्रम में चार सूक्ष्म रेखाएँ मिलती हैं [चित्र (1)] कुछ विशेष सूक्ष्म लाइनों में यह विशेषता पायी गयी है :—



चित्र–संख्या 1

(ए) बहुरवेदार (बी) ग्लास (सी) घोल का प्रायोगिक ई. एस. आर. वर्णक्रम



चित्र–संख्या 2

(ए) प्रायोगिक (बी) विश्लेषित प्रकाशिक पट्टिका

(1) इनकी तीव्रता समान नहीं है

(2) ये सममिति में नहीं हैं।[9, 10, 11]

वर्णक्रम की रेखाओं को निम्नलिखित समीकरण द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है :—

$$\omega_0 = g_0 \beta_0 \frac{h}{n} + aM + \tfrac{1}{2}\hbar a^2 \; [I(I+1) - M^2/g_0 \beta_0 H$$

जहाँ

ω_0 = माइक्रोबेव आवृत्ति रेडियन/से०

g_0 = समदैशिक g का मान

a = समदैशिक अतिसूक्ष्म बिखराव (Splitting) नियतांक रेखिल विस्तृति प्राचलों का सैद्धान्तिक एवं प्रायोगिक मान गणना द्वारा निम्न प्रकार होता है :

A	B	C	D
प्रायोगिक मान			
2646	0.1553	0.0402	0.0268
सैद्धान्तिक मान			
–2636	– 1518	– 0091	– 00027

प्रकाश अवशोषण अध्ययन

प्रायोगिक तौर पर प्रकाशीय घनत्व तथा तरंग संख्या के बीच आरेख [चित्र (2)] के अनुरूप प्राप्त होता है। विभिन्न प्राचलों का मान निम्नवत् प्राप्त होता है :—

σ	δ	D	ε
1603	2.33	0.85	30.8

ε का मान अत्यन्त अल्प होने के कारण विश्लेषित बैंड अत्यन्त क्षीण प्राप्त होता है। इस प्रकार का वर्णक्रम केवल Cu^{+2} संकुलों में ही प्राप्त होता है परन्तु मुक्त आयनों के मामलों में ऐसा वर्णक्रम नहीं प्राप्त होता है। इससे इस बात का पता चलता है कि लीगैन्ड के ऊपर क्रिस्टल फील्ड लगाने पर उसकी अवस्था में परिवर्तित हो जाता है। इस बैण्ड अवस्था का विश्लेषण करने पर Cu^{+2} आयन की संमिति के बारे में आवश्यक जानकारी प्राप्त होती है।

घोल की अवस्था में विभिन्न चुम्बकीय प्राचलों की गणना सम्भव नहीं है। केवल समदैशिक g_0 तथा a का ही मान निकालना सम्भव है। Cu^{+2}/L– आर्जिनीन के लिए $g_0 = 2.129$, तथा $a = 67.9 \times 10^{-4}$ सेमी. पाया गया है।

प्रकाशीय अवशोषण तथा इलेक्ट्रान प्रचक्रण अनुनाद वर्णक्रम के अध्ययन से पता चलता है कि संकुल की सममिति D_{4h} है एवं मूल अवस्था $d_{x^2-y^2}$ है। बहुक्रिस्टलीय (पाउडर) के E.S.R. वर्णक्रम की रेखाओं के लारेन्जियन होने की पुष्टि होती है। ग्लास तथा प्रकाशीय वर्णक्रम के अध्ययन से इस बात की पुष्टि होती है कि केन्द्रीय धातु आयन एवं लीगैण्ड समतल की अवस्था में (in plane) σ तथा π बन्ध अधिक सहसंयोजी होते हैं वहीं असमतल अवस्था में (Out of plane) π बन्ध कम सहसंयोजी होते हैं।

घोल की अवस्था में रेखिल विस्तृति के अध्ययन से यह निष्कर्ष निकलता है कि सैद्धान्तिक परिणाम तथा प्रायोगिक परिणाम लगभग समान हैं।

चक्रण श्रांति यांत्रिकी (Spin relaxation mechanism) के सिद्धान्त से न केवल धात्विक आयन तथा लीगैण्ड के बीच चुम्बकीय एवं अनुचुम्बकीय आन्तरिक क्रिया के बारे में महत्वपूर्ण जानकारी मिलती है बल्कि संकुल के भौतिक तथा रासायनिक गुणों के बारे में अति रोचक तथा उपयोगी जानकारी प्राप्त होती है।

निर्देश

1. न्यूबुल, एफ. के. : J. Chem. Phys : 1960, 33, 1074.
2. किविल्सन, डी. तथा नीमैन, आर. : J. Chem. Phys 1961, 35, 147.
3. राबर्ट्स, ई. एम. तथा कास्की डब्ल्यू. एस. : J. Amer. Chem. Soc. 1960, 82, 30006.
4. मिश्रा, बी. एन., शर्मा, एस. डी. तथा गुप्ता, एस. के. : J. Magn. Resonance, 1974, 16, 193.
5. स्वालेन, जे. डी. तथा ग्लैडिनी, एच. एम. एम. आई. बी. : J. Res. Dev 1964, 8, 515.
6. वानलेक, जे. एच. : Phys. Rev 1948, 74, 1168.
7. विल्सन, आर. तथा किविल्सन, डी. : J. Chem. Phys 1966, 44, 154, 440, 4445.
8. एटकिन्स, पी. डब्ल्यू. तथा किविल्सन, डी. : J. Chem. Phys. 1966, 44, 169.
9. मैरिएज, ए. जे. : Aust. J. Chem 1965, 18, 463.
10. मकगार्वे, बी. आर. : Transition Metal Chemistry, Marcel Dekker 1966, 3, 89.
11. मक्कोनल, एच. एम. : J. Chem. Phys 1956, 75, 709.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 44, No. 3, July 2001.

मेथी में कैडमियम की सान्द्रता और उसकी उपज पर Cd × Ca की अन्योन्य क्रिया का प्रभाव

दिनेश मणि, कृष्णकांत त्रिपाठी तथा चितरंजन कुमार
शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त — मई 16, 2001]

सारांश

शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान, इलाहाबाद के प्रायोगिक प्रक्षेत्र की सिल्ट्युक्त मटियार दोमट जलोढ़ मृदा लेकर एक गमला प्रयोग (Pot Experiment) व्यवस्थित किया गया। इस प्रयोग में 5 कि० ग्रा० मृदा (पी-एच० 7.5) प्रत्येक गमलों में डाली गयी। कैल्सियम की तीन मात्राएं (0, 0.5 तथा 1 प्रतिशत) कैल्सियम सल्फेट के रूप में तथा कैडमियम की तीन मात्राएं (0, 15 तथा 30 पी० पी० एम०) कैडमियम कार्बोनेट के रूप में मिलाई गयीं। प्रयोगोपरान्त मेथी की पत्तियों में कैडमियम के सान्द्रण एवं मिट्टी में कैल्सियम अनुप्रयोग के बीच ऋणात्मक सह-सम्बन्ध पाया गया। अधिक मात्रा में (1 प्रतिशत तक) कैल्सियम के अनुप्रयोग से मेथी की पत्तियों में कैडमियम सान्द्रण में कमी देखी गयी।

Abstract

Effect of Cd × Ca interaction on yield and concentration of Cd in fenugreek, *By* Dinesh Mani, K. K. Tripathi and Chitranjan Kumar, Sheila Dhar Institute of Soil Science, Allahabad University, Allahabad.

A pot experiment was arranged by taking alluvial soil (silty and clay loam) of Sheila Dhar Institute experimental farm, Allahabad. Earthen pots containing 5 kg soil (pH 7.5) were used in these experiments. Ca was applied as $CaSO_4$ to provide Ca at the rate of 0, 0.5 and 1.0 % Cadmium was applied as $CdCO_3$ at the rate of 0, 15 and ppm. The level of Cd in fenugreek was found to be negatively correlated with calcium application. It was observed that Ca inhibits the toxic effect of Cd on the yield and minimises the concentration of Cd in fenugreek leaves especially when Ca is added at a high level of 1 per cent.

यह देखा जा रहा है कि अनेक प्रकार के मानवीय क्रियाकलापों (यथा-कृषीय एवं औद्योगिक) के कारण विभिन्न प्रकार के हानिकारक पदार्थ मिट्टी में डाले जा रहे हैं। इन हानिकारक पदार्थों में भारी धातुयें प्रमुख हैं जो मिट्टी में अधिक मात्रा में संचित होने पर पौधों द्वारा उद्ग्रहीत कर ली जाती हैं जिससे इनके उपयोग से मानव एवं पशु स्वास्थ्य पर प्रतिकूल प्रभाव पड़ता है।[1]

अवशोषण के समय भारी धातुओं में परस्पर होने वाली स्पर्धात्मक अन्योन्यक्रियायें जटिल हैं और इनका विस्तृत अध्ययन अभी तक नहीं किया गया है। मृदा विलयन में प्रायः अधिक मात्रा में Ca^{++} आयनों की उपस्थिति में Cd^{++} आयनों से स्पर्धात्मक प्रभाव पाया गया है। सामान्यतः इस तरह की परस्पर क्रियाओं से सम्बन्धित यांत्रिकी एवं रासायनिकी के विषय में पर्याप्त जानकारी उपलब्ध नहीं है। वस्तुतः अन्योन्यक्रिया एक भारी धातु से दूसरी भारी धातु के बीच यौगिकों (यथा-एन्जाइम) अथवा परिसंचरण के लिए उत्तरदायी यौगिकों/तत्त्वों के स्थान के लिए एक प्रकार की प्रतिस्पर्धा होती है। उदाहरणस्वरूप, यह देखा गया है कि अधिक मात्रा में जिंक, निकेल एवं कॉपर के कारण पौधों में लौह तथा मैंगनीज की कमी के लक्षण उत्पन्न होते हैं।[2]

अन्योन्यक्रिया के विषय में विशेष रूप से उल्लेखनीय है कि अन्योन्यक्रिया कई कारकों पर निर्भर करती है, यथा— मृदा विलयन में धात्विक आयन और दूसरे आयन की सान्द्रता, मृदा की ठोस अवस्था से लगे हुए अवशोषण के स्थान, उनके प्रकार एवं मात्रा, कार्ब-धात्विक जटिल बनाने योग्य सभी पदार्थों की सान्द्रता, मृदा का पी-एच० एवं रेडॉक्स विभव इत्यादि। कैडमियम से प्रदूषित मृदा में प्राकृतिक उर्वरक और बेन्टोनाइट क्ले बलुई मृदा में अत्यन्त लाभकारी सिद्ध हुए हैं।[3] यह भी देखा गया है कि चूने के प्रयोग से पौधों द्वारा मैंगनीज, जिंक तथा विशेष रूप से कैडमियम के अवशोषण में कमी आती है।[4]

मृदा एवं पौधों के धात्विक प्रदूषण को कम करने में अन्योन्यक्रिया के महत्त्व को ध्यान में रखते हुए हमने प्रस्तुत प्रयोग की रूपरेखा बनाई।

प्रयोगात्मक

प्रस्तुत प्रयोग हेतु मिट्टी के गमलों में 5 कि० ग्रा० मिट्टी (पी-एच० 7.5) लेकर उसमें समान रूप से 50 kg N, 50 Kg P_2O_5 एवं 50 kg K_2O प्रति हेक्टेयर की दर से क्रमशः यूरिया, सिंगल सुपरफास्फेट तथा म्यूरेट आफ पोटाश के रूप में मिलाया गया। सूचक फसल के रूप में मेथी उगाई गई। बुवाई के 45 दिन पश्चात् पौधों को जड़ समेत उखाड़ लिया गया।

मृदा की धनायन विनिमय क्षमता उदासीन 1 N-अमोनियम एसीटेट निक्षालन विधि द्वारा[5], जैविक कार्बन वाक्ले एवं ब्लैक की तीव्र अनुमापन विधि द्वारा[6] और पी-एच० मान डिजिटल पी-एच० मीटर द्वारा ज्ञात किया गया। मृदा में विद्यमान कुल भारी धातुओं के विश्लेषण हेतु द्वि-अम्ल 5 ml. सान्द्र HNO_3 और 5 ml. $HClO_4$ (60%) निष्कर्ष तैयार किया गया। डी० टी० पी० ए० निष्कर्षित सान्द्रण के लिए डी० टी० पी० ए० निष्कर्ष {1.97 ग्राम (0.05M) डी० टी० पी० ए० पाउडर, 13.3 ml. (0.1 M) ट्राई-एथेनाल एमीन और 1.47 ग्राम (0.01M) कैल्सियम क्लोराइड को

पी-एच० 7.3 पर निर्धारित कर} तैयार किया गया। पौध निष्कर्ष के लिए त्रि-अम्ल मिश्रण (सान्द्र 25 ml HNO_3 + 10 ml $HClO_4$ +5 ml सान्द्र H_2SO_4) का प्रयोग किया गया। निष्कर्ष तैयार करके एटॉमिक एब्जार्प्सन स्पेक्ट्रोफोटोमीटर (Model PYVUNICAM SP2900 Coupled with SP9 Computer) की सहायता से भारी वस्तुओं की मात्रा ज्ञात की गयी।

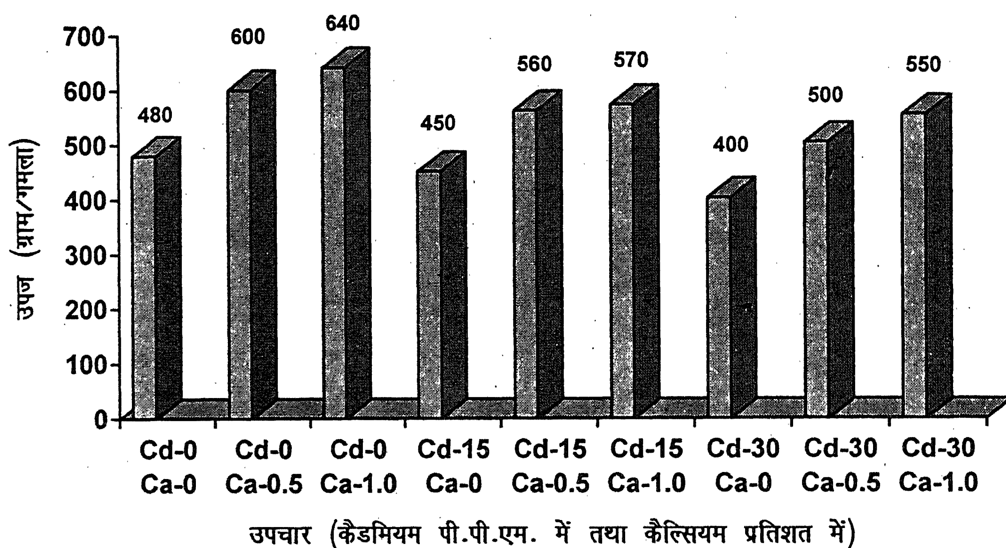
सारणी 1

शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान प्रक्षेत्र की सामान्य मृदा के भौतिक-रासायनिक गुण

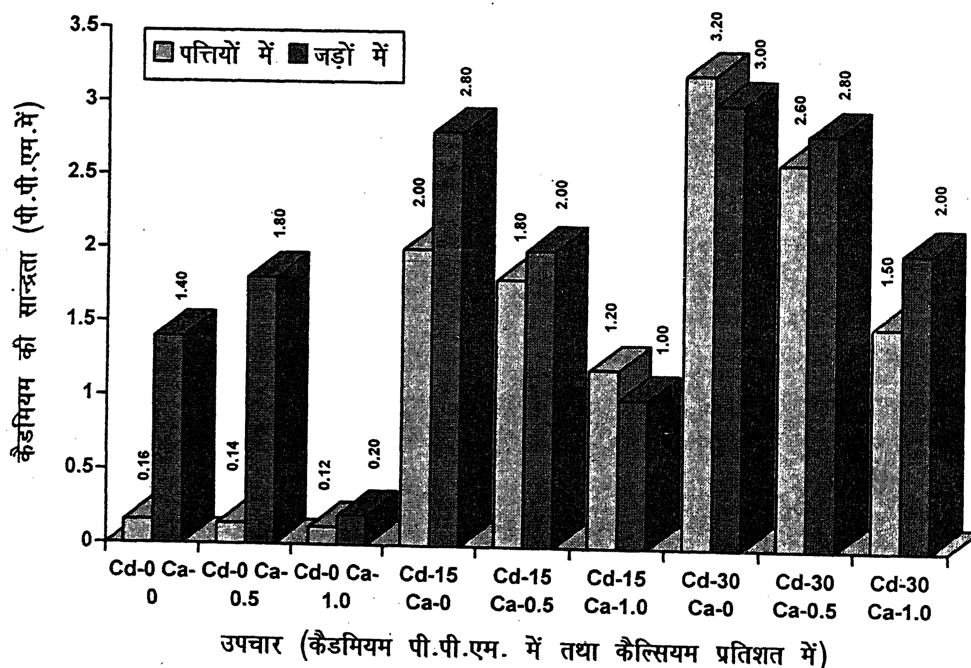
पी-एच०	7.5
विद्युतचालकता (d Sm^{-1}) 25°C पर	0.16
जैविक कार्बन	**0.58** प्रतिशत
कुल नाइट्रोजन	**0.08 प्रतिशत**
धनायन विनिमय क्षमता (C mol (P^+) kg^{-1})	19.5
कुल फास्फेट	**0.08 प्रतिशत**
डी०टी०पी०ए० निष्कर्षणीय कैडमियम	**0.03** पी०पी०एम०
डी०टी०पी०ए० निष्कर्षणीय क्रोमियम	**0.24** पी०पी०एम०
डी०टी०पी०ए० निष्कर्षणीय कॉपर	**1.2** पी०पी०एम०
डी०टी०पी०ए० निष्कर्षणीय लैड	**0.3** पी०पी०एम०
डी०टी०पी०ए० निष्कर्षणीय जिंक	**4.4** पी०पी०एम०

परिणाम तथा विवेचना

मृदा में कैडमियम के अकेले प्रयोग (30 पी० पी० एम०) से मेथी की उपज सबसे कम प्राप्त हुई परन्तु कैडमियम-कैल्सियम के संयुक्त प्रयोग से मेथी की उपज आंशिक रूप से प्रभावित हुई। जब अकेले कैडमियम (30 पी० पी० एम०) प्रयोग किया गया तो न्यूनतम उपज (400 ग्राम प्रति गमला) प्राप्त हुयी, परन्तु जब कैडमियम (30 पी० पी० एम०) के साथ 1 प्रतिशत कैल्सियम का प्रयोग किया गया तो उपज 550 ग्राम प्रति गमला प्राप्त हुयी। अकेले कैडमियम (15 पी० पी० एम०) मिलाने पर उपज 450 ग्राम प्रति गमला प्राप्त हुई। Cd 15 पी० पी० पी० + Ca 1% के उपचार करने पर उपज बढ़कर 570 ग्राम प्रति गमला हो गयी। Cd 30 पी० पी० एम० + Ca 1 % से उपचारित गमलों की मेथी की) पत्तियों और जड़ों में कैडमियम का संचय क्रमशः 3.2 पी० पी० एम० से घटकर 1.5 पी० पी० एम० और 3.0 पी० पी० एम० से घटकर 2.0 पी० पी० एम० देखा गया। इसी प्रकार Cd 15 पी० पी० पी० + Ca 1 % से उपचारित गमलों में मेथी की पत्तियों और जड़ों में कैडमियम का संचय क्रमशः 2.8 पी० पी० एम० से घटकर 1.0 पी० पी० एम० और 2.1 प्री० पी० एम० से घटकर 1.05 पी० पी० एम० देखा गया।



चित्र 1 : मेथी की उपज पर कैडमियम तथा कैल्सियम के अन्योन्यक्रिया का प्रभाव



चित्र 2 : मेथी में कैडमियम की सान्द्रता पर कैडमियम तथा कैल्सियम की अन्योन्य क्रिया का प्रभाव

सारणी 2

मेथी की उपज पर कैडमियम तथा कैल्सियम की अन्योन्यक्रिया का प्रभाव

क्र. सं.	उपचार		उपज (ग्राम प्रति गमला)
	कैडमियम की मात्रा (पी०पी०एम० में)	कैल्सियम की मात्रा (प्रतिशत में)	
1.	0	0	480
2.	0	0.5	600
3.	0	1.0	640
4.	15	0	450
5.	15	0.5	560
6.	15	1.0	570
7.	30	0	400
8.	30	0.5	500
9.	30	1.5	550
S.E. = 22.15			C.D. = 48.27

सारणी 3

मेथी में कैडमियम की सान्द्रता पर कैडमियम तथा कैल्सियम की अन्योन्यक्रिया का प्रभाव

क्र. सं.	उपचार		कैडमियम की मात्रा (पी.पी.एम. में)	
	कैडमियम की मात्रा (पी०पी०एम० में)	कैल्शियम की मात्रा (प्रतिशत में)	पत्तियों में	जड़ों म
1.	0	0	0.16	1.4
2.	0	0.5	0.14	1.8
3.	0	1.0	0.12	0.2
4.	15	0	2.00	2.8
5.	15	0.5	1.80	2.0
6.	15	1.0	1.20	1.0
7.	309	0	3.20	3.0
8.	30	0.5	2.60	2.8
9.	30	1.5	1.50	2.0
			S.E. = 0.326 C.D. = 0.712	S.E. = 0.278 C.D. = 0.605

इस प्रकार कैल्सियम द्वारा उपचारित मेथी के पौधों की कुल उपज में 25-40 प्रतिशत की वृद्धि हुई। पत्तियों में कैडमियम के संचय में लगभग 50 से 65 प्रतिशत की कमी हुई तथा जड़ों में कैडमियम के संचय में 30-50 प्रतिशत की कमी हुई।

पत्तीदार सब्जियों में कैडमियम का संचय फलदार पौधों तथा अनाजों की तुलना में तीव्र गति से होता है। रासायनिक तत्त्वों की अन्योन्यक्रिया पौधों की कायिकी में महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाती है। यह अध्ययन दर्शाता है कि मृदा सुधारकों में विद्यमान तत्त्वों की अन्योन्यक्रिया भी पौधों द्वारा कैडमियम के अवशोषण को काफी हद तक प्रभावित करती है। कैल्सियम की अच्छी आयनिक क्षमता मृदा में कैडमियम के अधिशोषण को कम करती है।[7]

निर्देश

1. मिश्र, एस० जी० तथा दिनेश मणि : विज्ञान परिषद अनुसंधान पत्रिका, 2001, 44 (2), 161-168.

2. लीपर, जी० डब्लू० : Managing the Heavy Metals on Land, Dekker, New York, 1978.

3. ट्रॉल्सेन, बी० डी०; स्ट्रम्फ, आई०; स्कोनहर्ड, जी० : Effect of Selected Soil Additives on Cadmium uptake of various crops. Schutzdienstes 1998, 50 (10), 263-267.

4. लेक्हॉक्जकी, ई०; मार्थ, पी०; झाबाडोज, आई० तथा झोमोलानी, ए० : Effect of liming on the heavy metal uptake of lettuce. Agrokemia as Talahitan 1998, 47 (1/4), 229-234.

5. ब्लेकमोर, एल० सी०; सर्ली, पी० एल० तथा डॉली, बी० के० : Extractable Iron, Aluminium and Silicon. In methods for Chemical Analysis of Soils. 1987, 71-76.

6. पाइपर, सी० एस० : Soil and Plant Analysis. Inter Science Publisher, Newyork, USA 1963.

7. मोरल, आर०; गोमेज, आई०; नवैरो पेड्रेनो, जे० तथा मैरिक्स, जे० : Cd adsorption in different substrata : Influence Exerted by Ca. Agrochimica 1996, 40 (4), 191-196.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 44, No. 3, July 2001.

बहुपरती वलनों का वर्गीकरण : एक शोध-विवेचन एवं प्रस्तावित नवीन हिन्दी शब्दावली

वैभव श्रीवास्तव
भूविज्ञान विभाग, नागालैंड विश्वविद्यालय, कोहिमा
तथा
विजय कुमार गैरोला
भूविज्ञान विभाग, काशी हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त — फरवरी 9, 2001]

सारांश

विरूपित शैलों में पाये जाने वाले बहुपरती वलनों के वर्गीकरण हेतु हाल के वर्षों में नवीन योजनाएँ प्रतिपादित की गई हैं जो वलनों को सतहों की आकृति एवं परतों की ज्यामिति के आधार पर विभिन्न वर्गों में विभेदित करती हैं। शोधकार्यों में इन योजनाओं की उपयोगिता का विवेचन इस प्रपत्र में किया गया है। वलन वर्गीकरण की नवीन योजनाओं के आगमन के साथ ही अनेक नए तकनीकी शब्दों का प्रादुर्भाव हुआ है। वलन वर्णन एवं वर्गीकरण में प्रयुक्त होने वाले ऐसे नए तकनीकी अंग्रेजी शब्दों के हिन्दी पर्याय इस लेख में प्रस्तावित किए गए हैं।

Abstract

Classification of multilayered fold : A research based review and proposed new Hindi terminology. *By* Vaibhava Srivastava, Department of Geology, Nagaland University, Kohima and V. K. Gairola, Department of Geology, Banaras Hindu University, Varanasi (U.P.).

In recent years new schemes have come for the classification of multilayered folds in deformed rocks. These schemes which are based mainly on the shape of the surfaces, and geometry of the layers of the

folds, have introduced many new terms of fold types such as Isodeviatoric (*Samvichalani*), Anisodeviatoric (*Asamvichalani*), Analogous (*Samjyamitic*), Peri-analogous *(Parisamjyamitic)*, Sub-analogous (*Upsamjyamitic*), Sub-nonanalogous *(Upvishamjyamitic)*, Nonanalogous (*Vishamjyamitic*), Strongly Nonanalogous (*Ativishamjyamitic*), Strictly harmonic (*Samakritic*), Peri-harmonic (*Parisamakritic*), Subharmonic *(Upsamakritic)*, Sub-nonharmonic (*Upvishmakritic*) Nonharmonic *(Vishamakritic)*, Strongly Non-harmonic (*Ati-Vishamakritic*), Almost-Box (*Prabux* and *Avabux*). Between Box and Semi-ellipse (*Bux-Ardhadeerghvrittamadhya*). Almost Semi-ellipse (*Prardhdeerghvritta* and *Avardhdeerghvritta*), Between Semi-ellipse and Parabola (*Ardhadeerghvritta Paravalaymadhya*), Almost Parabola (*Praparvalaya & Avaparvalaya*). Between Parabola and Sine Wave (*Parvalaya-Jyatarangmadhya),* Almost Sine Wave *(Prajyatarang* and *Avajyatarang),* Between Sine-Wave and Chevron *(Jyatarang-Koniyamadhya)* Almost Chevron *(Prakoniya* and *Avakoniya).* In the present paper, the advantages and limitations of these schemes have been discussed. Also a new Hindi terminology for folds has been proposed. Roman transcrption of Hindi terms has been written in *Italics.*

भू-वैज्ञानिक अध्ययनों में वलन संरचना का अत्यधिक महत्त्व होने के कारण प्रकृति में पाये जाने वाले वलनों के विभिन्न स्वरूपों तथा गुणों को व्यक्त करने के लिए अर्थात् वलनों के वर्गीकरण के लिए अनेक योजनाएँ तथा तकनीकी शब्द प्रचलित हैं जो भिन्न-भिन्न आधारों पर इन्हें परस्पर विभेदित करने में समर्थ हैं। उदाहरणार्थ वलन का वर्गीकरण अनुप्रस्थ काट में परिलक्षित स्वरूप[1] (Appearance in cross section), वलन प्रकृति[1] (Attitude of fold), उत्पत्ति[1] (Symmetry), अंतराभुजीय कोण[3, 4] (Interlimb angle), परत ज्यामिति[5, 6] (Geometry of layer) एवं सतह आकृति[7, 8] (Shape of surface) आदि आधारों पर किया जा सकता है। किन्तु वलन वर्गीकरण की उपर्युक्त पद्धतियाँ इन्हें एकपरती मान कर बनाई गई हैं जबकि प्रकृति में पाये जाने वाले वलन प्रायः बहुपरती हुआ करते हैं। हाल ही में बहुपरती वलनों के वर्गीकरण के लिए नई विधियों का विकास किया गया है।[9, 10] इस प्रपत्र में बहुपरती वलनों के वर्गीकरण की योजनाओं तथा उनके गुण-दोषों पर प्रकाश डाला गया है तथा साथ ही नवोद्भूत तकनीकी शब्दों के लिए हिन्दी में नए शब्द भी प्रस्तावित किए गए हैं।

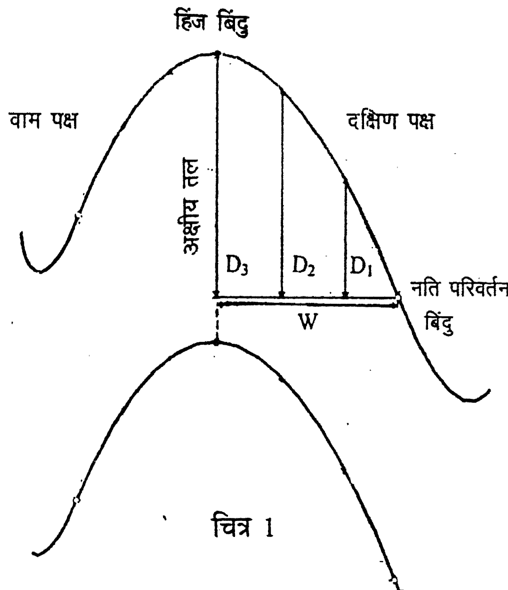
बहुपरती वलनों का वर्गीकरण

उपलब्ध विज्ञान साहित्य में बहुपरती वलनों का सर्वप्रथम उल्लेख वान हाइस[11] ने ऐसे वलन के लिए किया जिसके सभी परत एकजैसे वलित दिखाई पड़ते थे। वान हाइस[11] ने ऐसे वलन को Similar fold (समरूप वलन) कहा। बाद में रामसे[5] ने इस शब्द का उपयोग उस एकपरती

वलन के लिए किया जो एक विशेष ज्यामिति (वर्ग-2) को निरूपित करता है। वान हाइस[11] द्वारा उल्लिखित बहुपरती वलन को बाद में Harmonic fold (हार्मोनिक अथवा सुसंवादी वलन) कहा जाने लगा।[12] इस प्रकार बहुपरती वलनों के लिए एक नई योजना का जन्म हुआ जो वलनों को हार्मोनिक (harmonic) एवं विविधरूपी (disharmonic) वर्गों में विभक्त करती है। हार्मोनिक वलन वे वलन हैं जिनके सभी निर्माणकारी परतों का तरंगदैर्घ्य एवं आयाम एक सामान होता है। इस योजना के अनुसार अन्य सभी प्रकार के वलन दूसरे वर्ग के यानी विविधरूपी वलन होते हैं।[12] किन्तु वास्तव में अनेक यांत्रिक कारकों जैसे परत का संगठन, श्यानता, सरंध्रता, कण साइज, आकार इत्यादि में भिन्नता होने के कारण प्राकृतिक शैलों में हार्मोनिक वलनों का निर्माण बहुत कम हो पाता है। इसलिए क्षेत्रकार्य करने वाले भूवैज्ञानिकों को मिलने वाले सभी वलन एक ही वर्ग के अर्थात् विविधरूपी वलन हुआ करते थे। इस प्रकार के वर्गीकरण से कोई महत्वपूर्ण निष्कर्ष निकाल पाना संभव नहीं था इसलिए वर्गीकरण की यह योजना भूवैज्ञानिकों में लोकप्रिय नहीं हो सकी। हाल ही के वर्षों में बहुपरती वलनों के लिए प्रचुर सम्भावनाओं से युक्त वर्गीकरण की नई योजनाओं का विकास किया गया है[19, 10] जो क्रमशः वलन सतहों की आकृति एवं ज्यामिति में परिलक्षित परिवर्तनों पर आधारित हैं।

फूरिए विधि द्वारा आकृति विश्लेषण

वलनों के लिए सरल रूप में फूरिए विश्लेषण का प्रतिपादन स्टैबलर[13] ने किया था। तत्पश्चात् इस विधि को हडलस्टन[7], सिंह तथा गैरोला[8] एवं श्रीवास्तव तथा गैरोला[9] ने आगे विकसित किया। वलन के किसी सतह के फूरिए विश्लेषण के लिए सर्वप्रथम नतिपरिवर्तन बिंदु (inflexion point) से वलन के अक्षीय तल पर लंब की लंबाई (w) को तीन बराबर भागों में विभाजित कर लिया जाता है (चित्र-1)। तत्पश्चात् विभाजक बिंदुओं से अक्षीय तल के समांतर वलन सतह की दूरी को D_1, D_2 एवं D_3 के रूप में नाप लिया जाता है।



चित्र 1

स्टैबलर[13] द्वारा दिए गए निम्नलिखित सूत्रों (समी० 1 एवं 2) में D_1, D_2, D_3 तथा w के यथोचित मानों को रखकर प्रथम फूरिए गुणांक (b_1) तथा तृतीय फूरिए गुणांक (b_3) का गणन किया जाता है।

$$b_1 = y_1 + \sqrt{3}\,y_2 + y_3 \quad (1)$$

$$b_3 = 2y_1 - y_3 \quad (2)$$

जहाँ

$$y_1 = D_1\,\pi/(2w)$$

$$y_2 = D_2\,\pi/(2w)$$

$$y_3 = D_3\,\pi/(2w)$$

b_3/b_1 अनुपात के आधार पर हडलस्टन[7] ने 5 मूलभूत आकृतियों सहित वलन के कुल 8 प्रकार बताए। ये मूलभूत आकृतियाँ हैं—बक्स वलन **(Box fold)**, अर्धदीर्घवृत्त (Semi-ellipse), परवलय (Parabola), ज्यातरंग (Sine-wave) तथा कोणीय वलन (Chevron fold) जिनके लिए b_3/b_1 का एक निश्चित मान है (सारणी-1) जबकि अन्य वलनों के लिए b_3/b_1 अनुपात की ऊपरी तथा निचली सीमाएँ निर्धारित हैं। इन सीमाओं में संशोधन करके सिंह तथा गैरोला[8] ने वलन के 16 प्रकार विकसित किए जिनकी सीमाएँ सारणी-1 में दी गई हैं। इन सभी प्रकार की वलन आकृतियों के लिए हिन्दी में तकनीकी शब्द उपलब्ध नहीं हैं इसलिए ऐसे वलनों को यहाँ नए नाम (तारांकित, सारणी-1) प्रदान किए गए हैं।

सिंह तथा गैरोला[8] की वर्गीकरण योजना में उपर्युक्त 5 विशिष्ट आकृतियों के निकटवर्ती b_3/b_1 मानों वाले वलनों को एक ही नाम (जैसे Almost Box Fold) से जाना जाता है परन्तु इनका हिन्दी नामकरण करते समय वर्तमान लेखकों द्वारा इन्हें दो अलग-अलग नाम दिए गए हैं। मूलभूत आकृति के निश्चित मान से अधिक b_3/b_1 मान वाले वलन में प्रकृष्टता सूचक उपसर्ग 'प्र' तथा निश्चित मान से कम b_3/b_1 मान वाले वलन में हीनतासूचक उपसर्ग 'अव' जोड़कर नए तकनीकी शब्द बनाए गए हैं।

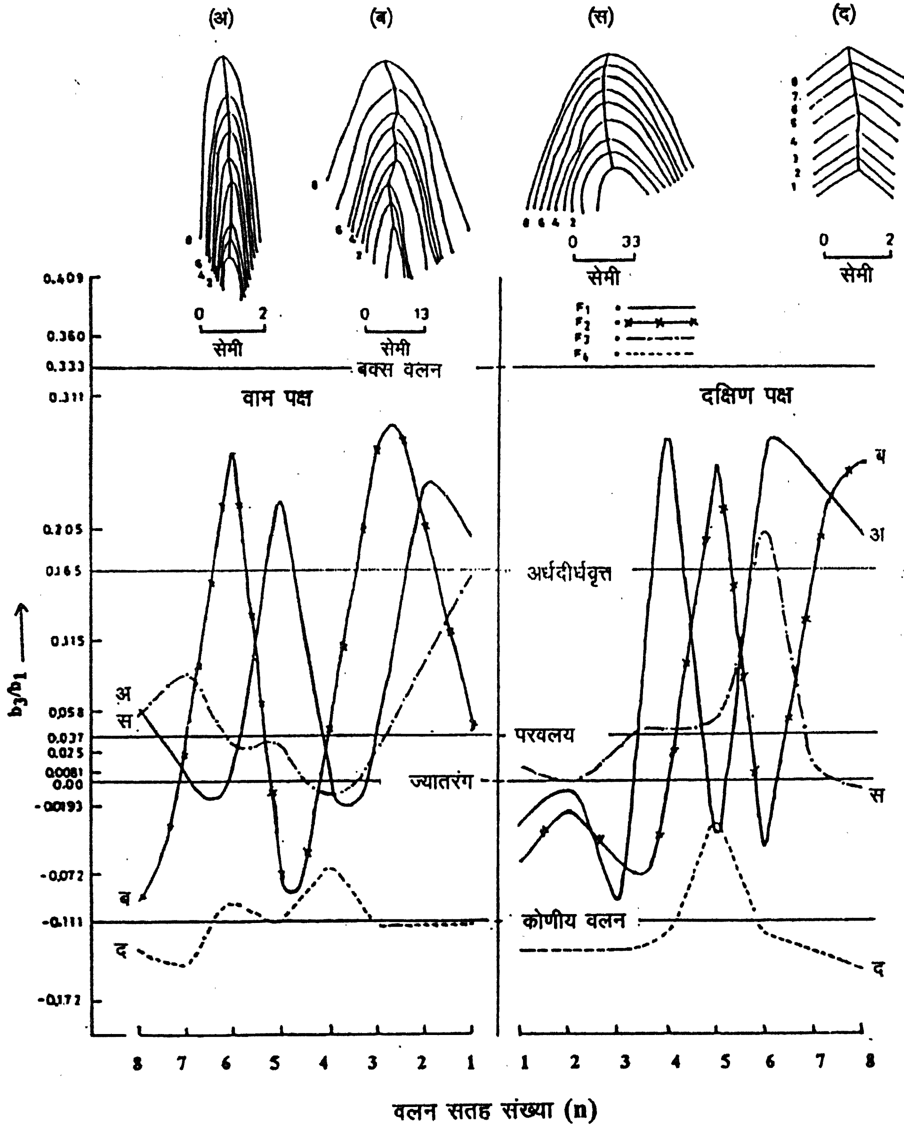
उदाहरणार्थ निश्चित मान वाले बक्स वलन ($b_3/b_1 = .333$) के निकटवर्ती मान वाले वलनों (Almost box fold, सारणी-1) को प्रबक्स ($0.333 < b_3/b_1 < 0.409$) तथा अवबक्स $0.311 < b_3/b_1 < 0.333$) कहा गया है। इसी प्रकार 'प्रार्धदीर्घवृत्त', 'अवदीर्घवृत्त', 'प्रपरवलय', 'अवपरवलय', 'प्रज्यातरंग', 'अवज्यातरंग', 'प्रकोणीय' तथा 'अवकोणीय वलन' इत्यादि नए तकनीकी शब्द बनाए गए हैं। हिन्दी में नए शब्दों के आगमन से वलन आकृति के लिए अंग्रेजी में प्रयुक्त 16 शब्दों के स्थान पर 21 तकनीकी शब्दों का प्रयोग हो सकेगा जिसके द्वारा वलन आकृतियों को और भी स्पष्टता के साथ व्यक्त किया जा सकेगा।

सारणी 1

विभिन्न वलन आकृतियों के लिए b_3/b_1 अनुपात की सीमाएँ

वलन वर्ग	(b_3/b_1) उपरी सीमा	निचली सीमा
Multiple (बहुल*)	–	0.409
Almost Box (प्रबक्स)	0.409	0.333
Box (बक्स)	0.333	0.333
Almost Box (अवबक्स*)	0.333	0.311
Between Box & Semi-ellipse (बक्स-अर्धदीर्घवृत्तमध्य*)	0.311	0.205
Almost Semi-ellipse (प्रार्धदीर्घवृत्त*)	0.205	0.165
Semi-ellipse (अर्धदीर्घवृत्त*)	0.165	0.165
Almost Semi-ellipse (अवार्धदीर्घवृत्त)	0.165	0.115
Between Semi-ellipse & Parabola (अर्धदीर्घवृत्त-परवलयमध्य*)	0.115	0.058
Almost Parabola (प्रपरवलय*)	0.058	0.037
Parabola (परवलय)	0.037	0.037
Almost Parabola (अवपरवलय*)	0.037	0.025
Between Parabola & Sine Wave (परवलय-ज्यातरंगमध्य*)	0.025	0.0081
Almost Sine Wave (प्रज्यातरंग*)	0.0081	0.00
Sine Wave (ज्यातरंग)	0.00	0.00
Almost Sine Wave (अवज्यातरंग*)	0.00	0.0193
Between Sine Wave & Chevron (ज्यातरंग-कोणीयमध्य*)	-0.0193	-0.072
Almost Chevron (प्रकोणीय*)	-0.072	-0.111
Chevron (कोणीय)	-0.111	-0.111
Almost Chevron (अवकोणीय*)	-0.111	-0.172
Cuspate (अग्रवर्धी)	-0.172	–

* नया तकनीकी शब्द



चित्र-2

किसी बहुपरती वलन के सतह की आकृतियों में आपसी भिन्नता (अथवा समानता) को व्यक्त करने के लिए श्रीवास्तव तथा गैरोला[9] ने एक आरेख (चित्र-2) प्रस्तुत किया जिसमें b_3/b_1 अनुपात को कोटि तथा सतह संख्या (n) को भुज पर निरूपित किया जाता है। इस आरेख पर किसी सतह की आकृति को एक बिंदु के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। इन बिन्दुओं को आपस में मिलाने

पर हमें एक सरल रेखा या वक्र प्राप्त होगा जिससे किसी बहुपरती वलन के विभिन्न सतहों की आकृति में परिवर्तन को एक दृष्टि में देखा जा सकता है। इस प्रकार भुज के समांतर प्राप्त एक सरल रेखा यह व्यक्त करती है कि वलन के सभी सतहों की आकृति एकसमान है और इसलिए ऐसे बहुपरती वलन को समाकृतिक (Strictly harmonic) वलन कहा गया है। अन्य वलनों की आकृति में सांख्यिकीय परिवर्तन को हम मानक विचलन के रूप में सूत्र (3) के प्रयोग द्वारा परिकलित कर सकते हैं।

मानक विचलन $$\sigma_n = \sqrt{[\{(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2/n\}/n]} \quad (3)$$

जहाँ $x = b_3/b_1$

n = सतहों की संख्या

मानक विचलन (σ_n) में 1000 से गुणा करने पर हमें असमानता गुणांक (Index of Nonharmony-INH) प्राप्त होता है

असमानता गुणांक (INH) = $1000 \cdot \sigma_n$ (4)

असमानता गुणांक के आधार पर बहुपरती वलनों को 6 वर्गों में विभक्त किया गया है[9] जिसे नए हिन्दी तकनीकी शब्दों (तारांकित) के साथ सारणी-2 में दिया गया है।

सारणी 2

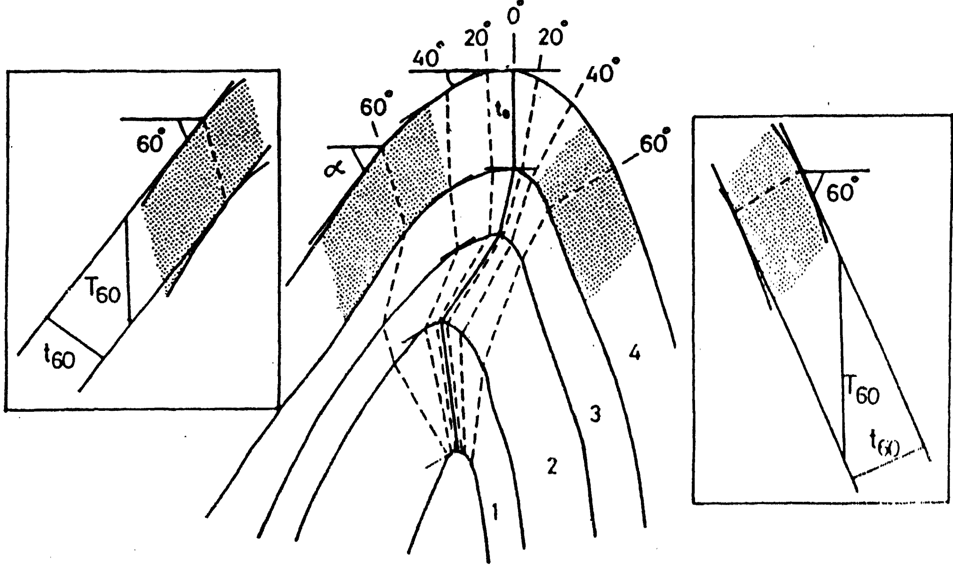
बहुपरती वलनों का आकृतिक वर्गीकरण

असमानता गुणांक (INH)	वलन वर्ग	हिन्दी पर्याय
0	Strictly harmonic fold	समाकृतिक* वलन
0 < INH < 15	Periharmonic fold	परिसमाकृतिक* वलन
15 < INH < 30	Subharmonic fold	उपसमाकृतिक* वलन
30 < INH < 45	Subnonharmonic fold	उपविषमाकृतिक* वलन
45 < INH < 75	Nonharmonic fold	विषमाकृतिक* वलन
75 < INH	Strongly Nonharmonic fold	अतिविषमाकृतिक* वलन

वलन का ज्यामितीय विश्लेषण

किसी वलित परत के ज्यामितीय विश्लेषण का प्रयास इलियट[14] ने सर्वप्रथम नति आइसोगान

संकल्पना के आधार पर किया था, जिसमें परतों की मोटाई को एक चर के रूप में समावेश कर रामसे[5] ने वलन की ज्यामिति को 1A, 1B, 1C, 2 एवं 3 नामक वर्गों में विभाजित किया। बाद में जागोरसेव[6] ने 1A के स्थान पर 1A1, 1A2 एवं 1A3 तथा 3 के स्थान पर 3A, 3B एवं 3C नामक नए वर्गों का समावेश किया। बहुपरती वलन में ज्यामितीय विश्लेषण के लिए निम्नलिखित विधि अपनाई जाती है।



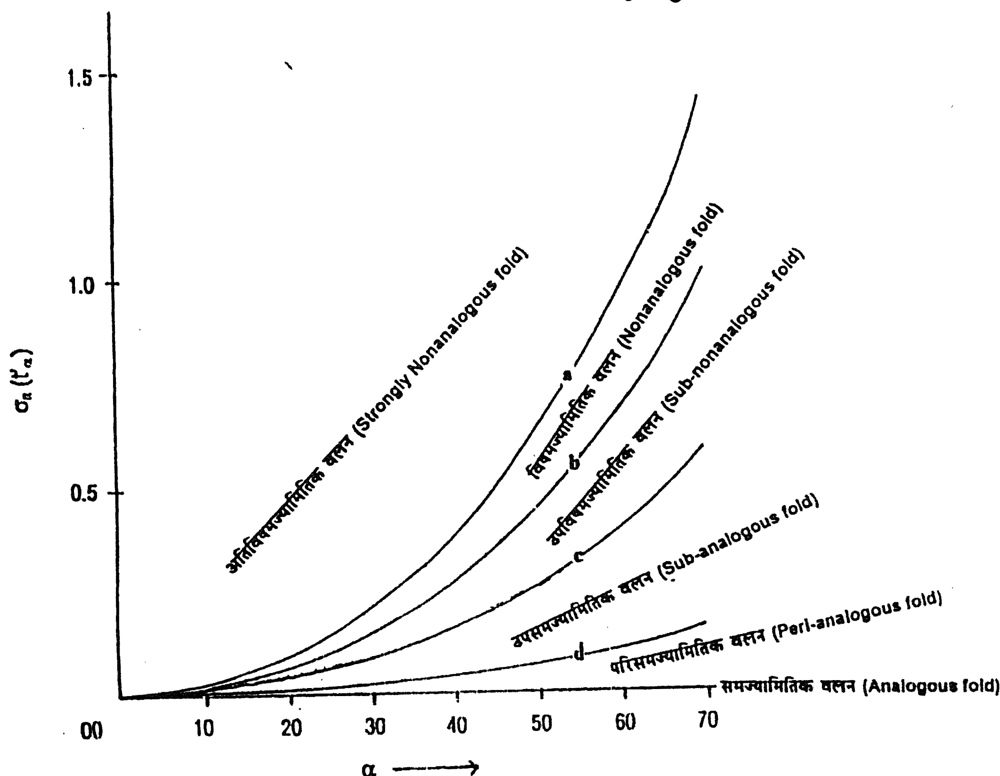
चित्र 3

सर्वप्रथम वलन के अनुरेख को अपनति रूप में रखकर सबसे ऊपरी परत के दोनों सतहों के हिंज बिन्दुओं को मिलाकर अक्षीय तल ज्ञात कर लेते हैं। वलन को पुनः इस स्थिति में लाते हैं कि अक्षीय तल ऊर्ध्व हो जाय। इस स्थिति में हिंजों पर स्पर्श रेखाएँ (tangents) क्षैतिज होंगी तथा इसे एक संदर्भ स्थिति मान लेते हैं जिसमें नति कोण (α) शून्य होगा तथा स्पर्शरेखाओं के बीच वलन की मोटाई 't_0' होगी। वलन की इस स्थिति के सापेक्ष अब यदि हम स्पर्श रेखाओं को क्षैतिज से किसी कोण 'α' पर झुका दें, तो स्पर्श रेखाएँ वलन के जिन नए बिन्दुओं को स्पर्श करेंगी उन्हें मिलाने वाली रेखा को 'α कोण पर नति आइसोगान' कहा जाता है। किसी परत के दो स्पर्शियों की बीच की लंबवत् दूरी को 't_α' तथा अक्षीय तल के समांतर दूरी को 'T_α' के रूप में व्यक्त किया जाता है (चित्र 3)। निम्नलिखित सूत्रों का प्रयोग कर अलग-अलग नतिकोणों (α) पर t_α तथा T_α से आनुपातिक मोटाई t_α' एवं T_α' का परिकलन निम्न प्रकार से किया जाता है।

$$t_\alpha' = t_\alpha / t_0 \qquad (5)$$

$$T_\alpha' = Tt_\alpha / T_0 \qquad (6)$$

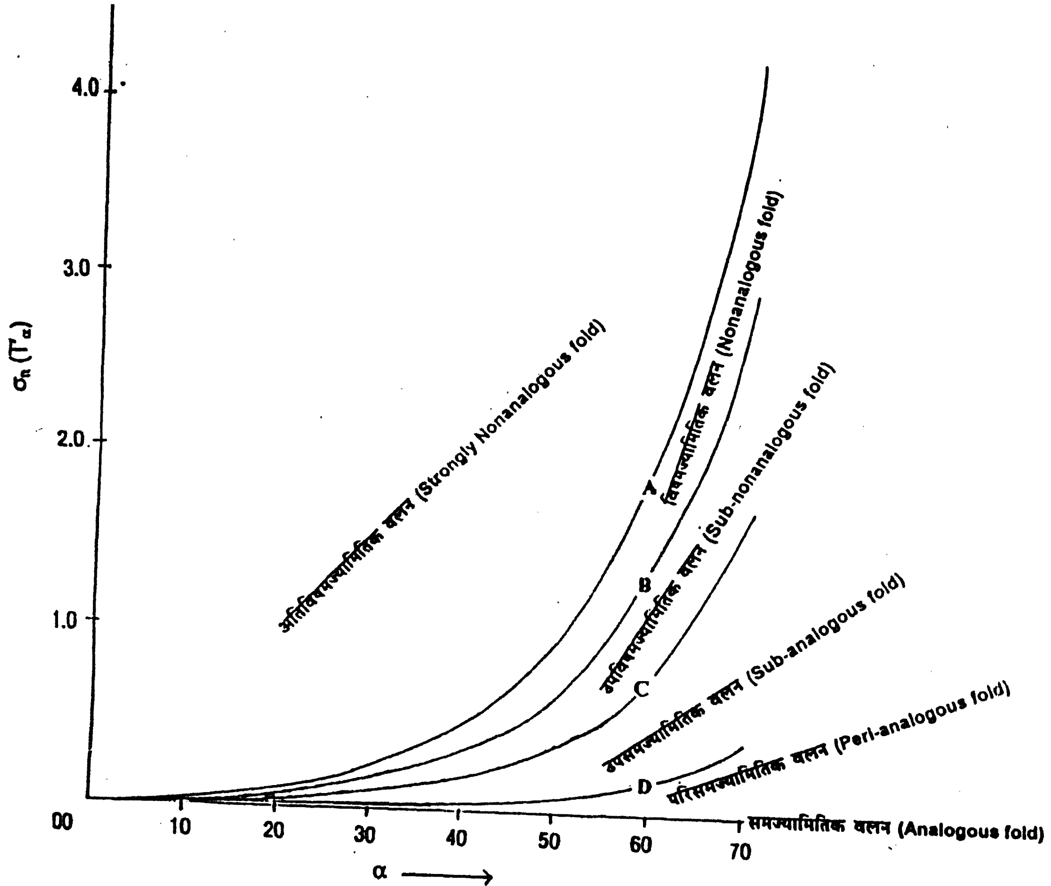
अलग-अलग नतिकोणों (α) पर वलन की आनुपातिक मोटाई में परिवर्तन का ग्राफीय प्रारूप किसी वलित परत की ज्यामिति को 9 प्रकार से व्यक्त करता है[6]। परन्तु परतों की संख्या अधिक हो जाने पर इस ग्राफीय आरेख द्वारा किसी बहुपरती वलन की ज्यामिति को ठीक से व्यक्त कर पाना कभी-कभी बहुत कठिन एवं अव्यवहारिक हो जाता है। इस कठिनाई को ध्यान में रखते हुए श्रीवास्तव तथा गैरोला[10] ने ऐसे आरेख (चित्र 4 एवं 5) विकसित किए जिसमें किसी बहुपरती वलन की ज्यामिति में परिवर्तन को व्यक्त कर पाना अपेक्षाकृत सुगम है।



चित्र 4

इस आरेख में 'n' परतों की विभिन्न नतिकोणों (α) पर आनुपातिक मोटाई (t'α या T'α) के मानक विचलन [σ_n (ta) या σ_n (T'a)], को कोटि पर तथा नतिकोण α को भुज पर प्लाट किया जाता है। इन प्लाटों को आपस में मिलाने पर हमें एक वक्र या सरल रेखा प्राप्त होती है। मानक आरेख (चित्र. 4 व 5) में इस रेखा की स्थिति के आधार पर बहुपरती वलनों का वर्गीकरण किया जाता है। ऐसा वलन जिसका आरेख भुज के समांतर एक सरल रेखा होती है, उसे समविचलनी (Isodeviatoric) तथा अन्य को असमविचलनी (Anisodeviatoric) वलन कहा गया है। ऐसा बहुपरती वलन जिसके सभी परत एकसमान ज्यामिति दर्शाते हैं, उसे समज्यामितिक वलन (Analogous fold)

कहा गया है। ऐसे वलनों का σn (t'a) विरुद्ध α, अथवा σn (T'a) विरुद्ध α प्लाट (चित्र 4 व 5) भुज पर आयेगा क्योंकि ऐसे वलन में t'a अथवा T'a का मानक विचलन हमेशा शून्य होगा। समज्यामितिक वलनों के 10 उपप्रकार बताए गए हैं जिन्हें 1A1-, 1A2-, 1A3-, 1B-, 3A-, 3B-, 3C- तथा सम्मिश्र-समज्यामितिक वलन कहा गया है। असमविचलनी वलनों को उनके वक्र की स्थिति के आधार पर परिसमज्यामितिक (Perianalogous), उपसमज्यामितिक (Subanalogous), उपविषम-ज्यामितिक (Subnonanalogous), विषमज्यामितिक (Nonanalogous) तथा अतिविषम-ज्यामितिक (Strongly nonanalogous) वलन कहा गया है।



चित्र 5

विवेचना

शैलों में प्राकृतिक रूप से पाये जाने वाले वलन प्रायः बहुपरती हुआ करते हैं क्योंकि प्रकृति में सर्पगतिक (Ptygmatic) अथवा आकुंचन (Buckle) जैसे एकपरती वलनों की उपस्थिति, बहुपरती

वलनों की तुलना में अत्यल्प है। सिद्धान्ततः यह बात उचित है कि बहुपरती वलन एक-एक परतों के संयोजन से बने होते हैं, किन्तु यह भी सत्य है कि यदि किसी बहुपरती वलन में परतों की संख्या अधिक हो तो प्रत्येक परत के माध्यम से उस वलन को व्यक्त करना न केवल कठिन अपितु अव्यवहारिक भी होगा। अतएव बहुपरती वलनों का अध्ययन एवं उसका निरूपण भी बहुपरती वलन के रूप में होना चाहिए। इस विचार को ध्यान में रखते हुए श्रीवास्तव तथा गैरोला[9, 10] द्वारा प्रस्तुत की गई बहुपरती वलनों के वर्गीकरण की योजनाएँ सार्थक प्रतीत होती हैं।

किसी बहुपरती वलन के निर्माणकारी सतहों के फूरिए विश्लेषण पर आधारित वलन वर्गीकरण की योजना[9] अत्यन्त संवेदनशील है जो आकृति में अल्प भिन्नता को भी सफलतापूर्वक विभेदित करने में सक्षम है। इस योजना में सतह की आकृतियों में असमानता को 'असमानता गुणांक' के नाम से मात्रात्मक रूप में व्यक्त किया जाता है। श्रीवास्तव तथा गैरोला[9] ने चार विभिन्न विरूपण प्रावस्थाओं के वलनों पर इस योजना का प्रयोग किया और पाया कि इन चारों प्रावस्थाओं के वलनों के औसत असमानता गुणांक में पर्याप्त विभिन्नता थी। महाकौशल संघ एवं छोटानागपुर ग्रेनाइट-नाइस संकुल के वलनों के अध्ययन में यह देखा गया कि सबसे बाद बने वलनों का औसत असमानता गुणांक सबसे कम एवं क्रमशः पुराने वलनों का औसत असमानता गुणांक क्रमशः अधिक था। यह अवलोकन सिद्धान्ततः इस बात की ओर इशारा करता है कि बाद में वलन पहले के वलनों की अपेक्षा कम विरूपणों से प्रभावित हुए हैं। अतएव यह योजना अपने गुणों के कारण संरचनात्मक भूवैज्ञानिक अध्ययनों में महती सम्भावनाओं से युक्त एक महत्वपूर्ण योजना प्रतीत होती है तथापि इसकी कुछ सीमाएँ भी हैं।

उदाहरणार्थ दो समाकृतिक वलन, जनकी मूलभूत आकृति भिन्न-भिन्न हो, एक ही नाम (समाकृतिक) से पुकारे जायेंगे तथा किसी वलन के दो सतहों जिनकी आकृति एक हो किन्तु आकार यदि भिन्न-भिन्न हो तो, ऐसे वलन समाकृतिक होते हुए भी हार्मोनिक नहीं हो सकते। अतः वर्गीकरण की इस योजना में शून्य असमानता गुणांक वाला वलन (समाकृतिक) हार्मोनिक वलन का प्रतिस्थापन नहीं करता है। किन्तु यदि किसी समाकृतिक वलन को व्यक्त करते समय वलन के आकृतिसूचक शब्द को उपसर्ग के रूप में प्रयुक्त करके व्यक्त किया जाय जैसे कि कोणीय-समाकृतिक वलन अथवा ज्यातरंग-समाकृतिक वलन इत्यादि तो समाकृतिक वलनों को और भी स्पष्टता के साथ व्यक्त किया जा सकता है। जब विभिन्न प्रावस्थाओं के वलनों का इस विधि द्वारा तुलनात्मक अध्ययन करना हो, तो यह ध्यान रखना चाहिए कि शिष्टाभता (S_2) या संस्तरण तल (S_1) दोनों में किसी एक पर ही वलन आकृति का विश्लेषण किया गया है। उदाहरण को लिए F_1 वलन की आकृति S_1 सतह पर तथा F_3 वलन की आकृति का S_2 सतह पर तो आकृति विश्लेषण, F_1 और F_3 के तुलनात्मक अध्ययन के लिए उचित नहीं होगा।

वलन परतों की ज्यामिति पर वर्गीकरण योजनाओं[5, 6, 10] का अपना महत्त्व है। रामसे[5] के अनुसार किसी वलित परत में विभिन्न नतिकोणों के साथ आनुपातिक मोटाई में होने वाला परिवर्तन वलन संक्रिया (Mechanism of folding) दर्शाता है। अनेक प्राकृतिक वलनों की ज्यामिति

का अध्ययन करने पर यह पाया गया कि एक ही बहुपरती वलन के विभिन्न परतों में अलग-अलग ज्यामिति उपस्थित हो सकती है[15]। परतों की ज्यामिति में इस प्रकार की विभिन्नता प्रयोगों द्वारा विकसित बहुपरती वलनों में भी देखी गई है[15, 16]। वास्तव में ज्यामिति के निर्धारण में वलन के परतों की संख्या की भी एक बड़ी भूमिका होती है। यथा परतों की संख्या अधिक होने पर वलन के सभी परतों में 1B ज्यामिति सुरक्षित नहीं रह सकती क्योंकि एक सीमा के पश्चात् परत की मोटाई में अन्तर आ जायेगा अथवा मोटाई के निश्चित रहने पर एक सीमा के पश्चात् वलन का अस्तित्व ही नहीं रह पायेगा क्योंकि तब वलन के परतों में कोई मुड़ाव संभव नहीं हो सकेगा। वस्तुतः केवल एक प्रकार के बहुपरती वलन (वर्ग-2 समज्यामितिक) में ही एकसमान ज्यामिति के असीमित परतों की उपस्थिति संभव है।

नई तकनीकी शब्दावली : सुझाव

इस लेख में लेखकों ने अनेक ऐसे हिन्दी तकनीकी शब्दों का प्रयोग किया है जो पहली बार प्रस्तुत किए गए हैं। हमारा सुझाव है कि सर्वस्वीकृत शब्दावली बनने तक इसका प्रयोग किया जा सकता है। इन तकनीकी शब्दों की सूची नीचे दी गई है–

समविचलनी वलन (Isodeviatoric fold), असमविचलनी वलन (Anisodeviatoric fold), समज्यामितिक वलन (Analogous fold), परिसमज्यामितिक वलन (Peri-analogous fold), उपसमज्यामितिक वलन (Sub-analogous fold), उपविषमज्यामितिक वलन (Sub-nonanalogous fold), विषमज्यामितिक वलन (Nonanalogous fold), अतिविषमज्यामितिक वलन (Strongly Nonanalogous fold), समाकृतिक वलन (Strictly Harmonic fold), परिसमाकृतिक वलन (Peri-harmonic fold), उपसमाकृतिक वलन (Subharmonic fold), उपविषमाकृतिक वलन (Subnonharmonic fold), विषमाकृतिक (Nonharmonic), अतिविषमाकृतिक वलन (Strongly Nonharmonic fold), प्रबक्स वलन (Almost Box fold), अवबक्स वलन (Almost Box fold), बक्स--अर्धदीर्घवृत्तमध्य वलन (Between Box and Semi-ellipse fold), प्रार्धदीर्घवृत्त वलन (Almost Semi-ellipse fold), अवार्धदीर्घवृत्त वलन (Almost Semi-ellipse fold), अर्धदीर्घवृत्त-परवलयमध्य वलन (Between Semi-ellipse and Parabola fold), प्रपरवलय वलन (Almost Parabola fold), अवपरवलय वलन (Almost Parabola fold), परवलय--ज्यातरंगमध्य वलन (Between Parabola and Sine Wave fold), प्रज्यातरंग वलन (Almost Sine Wave fold), अवज्यातरंग वलन (Almost Sine Wave fold), ज्यातरंग--कोणीयमध्य वलन (Between Sine Wave and Chevron fold), प्रक्रोणीय वलन (Almost Chevron fold), अवकोणीय वलन (Almost Chevron fold)।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय अपनी प्रेरणा के स्रोत प्रो० महाराज नारायण मेहरोत्रा के हृदय से आभारी हैं जिन्होंने मूल पांडुलिपि का समीक्षात्मक अध्ययन कर हमें इस लेख के गुण-दोषों से अवगत कराया।

निर्देश

1. बिलिंग्स, एम० पी० : स्ट्रक्चरल जियोलाजी, 1986, प्रेंटिस-हाल इंडिया, 1-606.

2. त्रिपाठी, ए० तथा गैरोला, वी० के० : जर्न० आफ स्ट्रक्चरल जियोलाजी, 1999, 21, 719-727.

3. फ्ल्यूटी, एम० जे० : प्रोसीडिंग आफ जिओलाजिकल एसोसिएशन आफ इंग्लैंड 1964, 75, 461-492.

4. ट्वीस, आर० जे० : जर्न० आफ स्ट्रक्चरल जियोलाजी, 1988, 10, 607-623.

5. रामसे, जे० जी० : फोल्डिंग एण्ड फ्रैक्चरिंग आफ राक्स, 1967 मैकग्रा हिल, न्यूयार्क

6. जागोरसेव, आई० एस : जर्न० स्ट्रक्चरल जियोलाजी, 1993, 15, 243-251

7. हडलस्टन, पी० जे० : टेक्टोनोफिजिक्स 1973, 16, 1-46

8. सिंह, आर० ए० तथा गैरोला, वी० के० : जर्न० आफ हिमालयन जियोलाजी, 1992, 3, 121-129

9. श्रीवास्तव, वी० तथा गैरोला, वी० के० : जर्न आफ स्ट्रक्चरल जियोलाजी, 1997, 301, 159-171

10. श्रीवास्तव, वी० तथा गैरोला, वी० के० : टेक्टोनोफिजिक्स, 1999, 301, 159-171

11. वान हाइस, सी० आर० : यू० एस० जियो० सर्वे 16 वीं वार्षिक रिपोर्ट, 1984, 571-843

12. प्राइस, एन० जे० तथा कास्ग्रोव, जे० डब्ल्यू० : एनालिसस ऑफ जियोलाजिकल स्ट्रक्चर्स, 1990 कैंब्रिज यूनि० प्रे० लंदन

13. स्टैबलर, सी० एल० : टेक्टोनोफिजिक्स, 1968, 6, 343-350

14. इलियट, डी० : जर्न० आफ जियोलाजी, 1965, 73, 865-880

15. श्रीवास्तव वी० : स्ट्रक्चर एंड टेक्टानिक्स एराउंड रनटोला, डिस्ट्रिक्ट सोनभद्र, यू० पी०, 1996 अप्रकाशित शोध प्रबन्ध, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

16. श्रीवास्तव, एच० बी० तथा गैरोला, वी० के० : बुले० आफ इंडि० जियो० एसो०, 1988, 21, 107-112

लेखकों से निवेदन

- विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हैं और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका को होना चाहिये।
- लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।
- अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये पाँच रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।
- लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे K_4FeCN_6 अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।
- ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।
- प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिए । अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सके।
- प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।
- लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायेंगे। पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume)और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से

  फॉवेल, आर० आर० तथा म्युलर, जे०, जाइट फिजिक० केमि०, 1928, **150**, 80
- प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) एक सौ रुपये मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।
- लेख "सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2"इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबन्ध सम्पादक

मूल्य
वार्षिक मूल्य : 100 रु० या 20 पौंड या 50 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 25 रु० या 6 पौंड या 10 डालर

Rates
Annual Rs. : 100 or 20 £ or $ 50
Per. Vol. Rs.: 25 or 6 £ or $ 10

प्रकाशक :
विज्ञान परिषद् प्रयाग
महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-२

Vijnana Parishad Prayag
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad-2 (India)

मुद्रक : कम्प्यूटर कम्पोजर्स
7, बेली एवेन्यू, इलाहाबाद
फोन : 640854, 640405

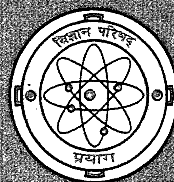
ISSN : 0505-5806

Vol. 44 October 2001 No.4

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

The Research Journal of the Hindi Science Academy

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika



विज्ञान परिषद् प्रयाग

महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-211002

कौंसिल ऑफ साइंस एण्ड टेक्नालॉजी, उत्तर प्रदेश तथा कौंसिल ऑफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्टियल रिसर्च, नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित

विषय-सूची

Vol. 44 October 2001 No.4

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 44, No. 4, October 2001.

भूमंडलीय जलवायु परिवर्तन तथा कामायनी में उसकी वैज्ञानिक विवेचना

राय अवधेश कुमार श्रीवास्तव *
अध्यक्ष, वैज्ञानिक तथा तकनीकी शब्दावली आयोग, भारत सरकार,
मानव संसाधन विकास मंत्रालय, नई दिल्ली -11006

मैं विज्ञान परिषद् प्रयाग, इलाहाबाद की वाराणसी इकाई को अपना हार्दिक धन्यवाद तथा कृतज्ञता प्रस्तुत करता हूँ कि सन् 2001 के प्रो० नंदलाल सिंह स्मृति व्याख्यान हेतु मुझे निमंत्रित किया गया है।

जिज्ञासा विज्ञान की जननी है। प्रश्न से ही उत्तर मिलता है। उत्तर तक पहुँचने के लिए कई चरणों से होकर गुजरना पड़ता है। प्रश्न का उत्तर मिलने से ही जिज्ञासा शांत होती है पर हमेशा नई जिज्ञासायें भी जन्म लेती जाती हैं। इसी तरह ज्ञान-विज्ञान का विकास होता है। हिंदी साहित्य के महान छायावादी कवि जयशंकर प्रसाद की कालजयी काव्य रचना ''कामायनी'' में वैज्ञानिक जिज्ञासा को कुछ इस प्रकार व्यक्त किया गया है—

ऊषा की सजल गुलाली जो
घुलती है नीले अंबर में;
वह क्या है ? क्या तुम देख रहे
वर्णों के मेघाडंबर में ?

भूमंडल के मौसम और जलवायु के प्रति भी मानव हमेशा से ही जिज्ञासु रहा है। भूमंडल का मौसम और जलवायु केवल मानव ही नहीं वरन् पृथ्वी के विभिन्न प्रकार के प्राणियों और वनस्पतियों के अस्तित्व से जुड़ा रहा है।

पृथ्वी की जलवायु कालांतर से ही परिवर्तनशील रही है। भौमिकीय काल-क्रम की विभिन्न अवधियों में हुये इन जलवायु परिवर्तनों को सारणी-1 में प्रस्तुत किया गया है। ये जलवायु परिवर्तन नाटकीय तो थे ही परन्तु इन्होंने पृथ्वी के प्राणियों तथा वनस्पतियों के उद्भव, विकास तथा विनाश

* प्रो० नन्द लाल सिंह स्मृति व्याख्यान, भौमिकी विभाग, काशी हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसीः 1 अगस्त, 2001

सारणी 1

भौमिकीय काल-क्रम में जलवायु परिवर्तन

युग	वर्ष (मिलियन)	काल	सापेक्ष जलवायु
सेनोज़ोइक		क्वार्टनरी	
	0–1	प्लीस्टोसीन	चार हिमानी, शीतोष्ण जोन हिमनित
	0–13	प्लाओसीन	शीतल
	13—25	मायोसीन	सामान्य
		टरसीयरी	
	25—36	ओलीगोसीन	सामान्य से उष्ण
	36—58	इओसीन	सामान्य, तत्पश्चात् उष्ण
	58—63	पैलियोसीन	सामान्य
मेसोज़ोइक	63—135	क्रिटेशियस	सामान्य
	135—181	जुरैसिक	उष्ण
	181—230	ट्रायसिक	उष्ण
	230—280	परमियन	हिमनित तत्पश्चात् सामान्य
	280—345	कार्बोनिफेरस	उष्ण; दक्षिणी गोलार्ध में हिमनित
पैलियोज़ोइक	345—405	डिवोनियन	सामान्य, तत्पश्चात् उष्ण
	405—425	सैलूरियन	उष्ण
	425—500	आर्डोविशन	सामान्य से उष्ण
	500—600	कैम्ब्रियन	शीतल, तत्पश्चात् उष्ण
		प्रीकैम्ब्रियन	दोनों गोलार्धों में हिमनित

के इतिहास को भी निरंतर प्रभावित किया है। इसके अतिरिक्त विभिन्न भूगतिक प्रक्रियाएं भी जलवायु परिवर्तनों द्वारा नियंत्रित होती रही हैं। पृथ्वी पर मानव के अस्तित्व से जुड़े इन जलवायु परिवर्तनों के सम्बन्ध में विगत कुछ वर्षों से उल्लेखनीय वैज्ञानिक शोध हो रहे हैं। प्रस्तुत व्याख्यान में भूमंडलीय जलवायु परिवर्तनों की विवेचना प्रस्तुत की गई है तथा हिंदी साहित्य के महान छायावादी कवि जयशंकर प्रसाद की कालजयी रचना ''कामायनी'' से कुछ ऐसे उदाहरण प्रस्तुत किये गये हैं जो जलवायु परिवर्तन के प्रति कवि के वैज्ञानिक दृष्टिकोण को प्रस्तुत करते हैं। भूवैज्ञानिक दृष्टिकोण से कामायनी की विवेचना का प्रयास पहली बार किया जा रहा है। पृथ्वी तथा ब्रह्माण्ड में होने

वाले परिवर्तन तथा उनके पुनरावर्तन को हिंदी साहित्य के शायद ही किसी अन्य कवि ने इतने स्पष्ट वैज्ञानिक सोच के साथ प्रस्तुत किया हो जैसा कि कामायनी के 'संघर्ष' सर्ग में जयशंकर प्रसाद ने किया है :—

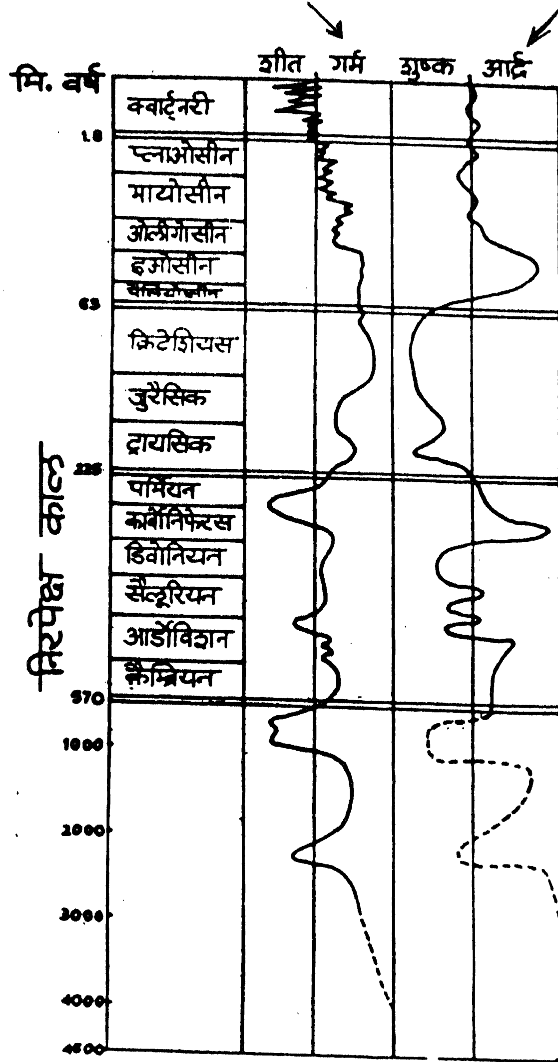
विश्व एक बंधनविहीन परिवर्तन तो है;
इसकी गति में रवि-शशि-तारे ये सब जो हैं
रूप बदलते रहते वसुधा जलनिधि बनती,
उदधि बना मरुभूमि जलधि में ज्वाला जलती।
तरल अग्नि की दौड़ लगी है सब के भीतर
गल कर बहते हिम-नग सरिता लीला रच कर।
यह स्फुलिंग का नृत्य एक पल आया बीता !
टिकने को कब मिला किसी को यहाँ सुभीता ?
कोटि कोटि नक्षत्र शून्य के महाविवर में,
लास रास कर रहे लटकते हुए अधर में।
उठती हैं पवनों के स्तर में लहरें कितनी,
यह असंख्य चीत्कार और परवशता इतनी।
यह नर्त्तन उन्मुक्त विश्व का स्पंदन द्रुततर,
गतिमय होता चला जा रहा अपने लय पर।
कभी कभी हम वही देखते पुनरावर्तन;
उसे मानते नियम चल रहा जिससे जीवन !

भूमंडलीय जलवायु परिवर्तन : भौमिकीय काल-क्रम के परिप्रेक्ष्य में

भूमंडलीय जलवायु परिवर्तनों को जब हम भौमिकीय काल-क्रम के परिप्रेक्ष्य में देखते हैं तो 'हिमयुग' विशेष उल्लेखनीय प्रतीत होते हैं। पृथ्वी के जलवायु इतिहास में इन हिमयुगों का विशेष महत्त्व है। इन हिमयुगों ने सम्पूर्ण व्यवस्था का कायाकल्प कर दिया। अब तक ऐसे पांच महत्वपूर्ण हिमयुग पृथ्वी पर आये हैं। इन हिमयुगों में पूर्व-कैम्ब्रियन काल के दो हिमयुग, आर्डोविशन काल के अंत में एक, कार्बोनिफेरस-परमियन काल का एक तथा सेनोज़ोइक काल के हिमयुग महत्त्वपूर्ण हैं। पूर्व-कैम्ब्रियन तथा कार्बोनिफेरस-परमियन काल के हिमयुग संभवतः बहुत ही विस्तृत प्रकृति के थे क्योंकि इनके कारण पृथ्वी का अधिकांश भूभाग प्रभावित हुआ था। सैलूरियन काल का हिमयुग भी अपने आप में प्रभावशाली रहा है। इन हिमयुगों के समय सम्पूर्ण भूमंडल शीतलता की ओर अग्रसर था। वैसे तो शीतल जलवायु वाली कई एक अन्य अवधियां भी पृथ्वी पर आयीं परन्तु इन सब में हिमानियों का प्रादुर्भाव नहीं मिलता।

मैसोज़ोइक काल के मध्य से प्रारम्भिक सेनोज़ोइक काल तक के लम्बे अंतराल में पृथ्वी की जलवायु सामान्य से उष्ण प्रवृत्ति की मानी जाती है। इसमें प्रारम्भिक क्रिटेशियन काल विशेष रूप से उष्ण था। कैम्ब्रियन तथा डिवोनियन काल की जलवायु भी गर्म थी।

भूमंडलीय तापमान का माध्य वर्तमान भूमंडलीय वर्षा का माध्य वर्तमान



चित्र 1. भौमिकीय कालक्रम में तापमान तथा वर्षा की प्रवृत्ति

संभवतः इस अवधि में वायुमंडल में कार्बन डाइ आक्साइड तथा जल-वाष्प की मात्रा अधिक रही हो तथा सागर-वायुमंडल व्यवस्था द्वारा सौर विकिरण की अत्यधिक मात्रा पृथ्वी पर रोक ली गयी हो। इसके साथ ही भौमिकीय काल-क्रम में वर्षा सम्बन्धी रिकार्ड देखने पर (चित्र-1) ऐसा प्रतीत होता है कि प्रत्येक हिमयुग के पश्चात् पृथ्वी पर वर्षा की मात्रा भी अत्यधिक रही है। इस प्रकार की प्रक्रिया प्राम्भिक सेनोज़ोइक तथा प्रारम्भिक कार्बोनिफेरस काल में दृष्टिगोचर होती है।

हिमानी तथा अंतराहिमानी काल

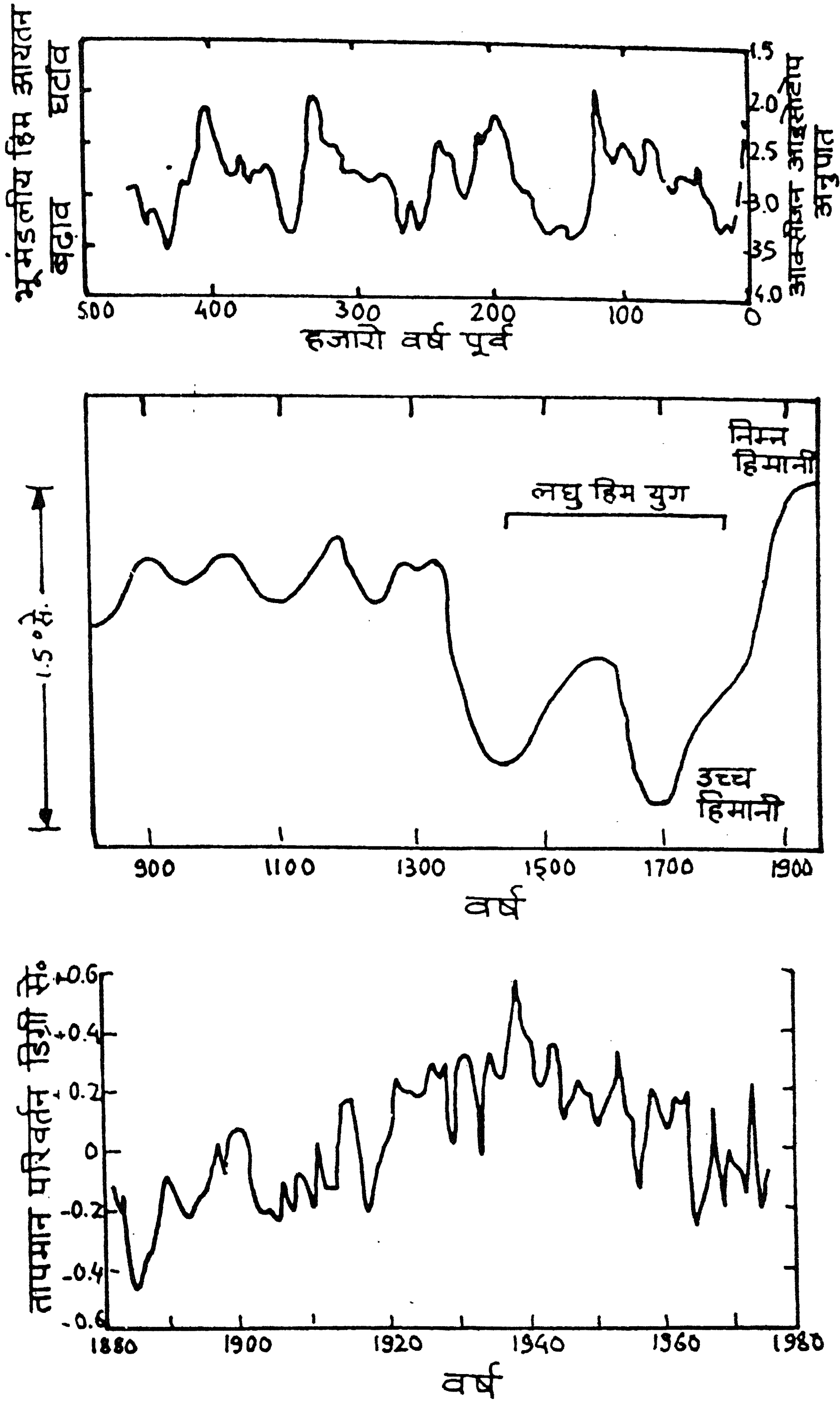
वर्ष	जलवायु (शीतल – उष्ण)	युरोप	उत्तरी अमेरिका	वर्ष
0				0
100,000		युर्म हिमानी	विस्कोन्सीन हिमानी	100,000
200,000		रिस-युर्म अंतरा हिमानी	सैन्गोमोन अंतरा हिमानी	200,000
300,000				300,000
400,000		रिस हिमानी	इलिनोयन हिमानी	400,000
500,000				500,000
600,000				600,000.
700,000		मिन्डल-रिस अंतरा हिमानी	यारमोथ अंतराहिमानी	700,000
800,000				800,000
900,000				900,000
1,000,000				1,000,000
1,100,000		मिन्डल हिमानी	आन्सान हिमानी	1,100,000
1,200,000				1,200,000
1,300,000		गुन्ज-मिन्डल अंतरा हिमानी	अफ्टोनियन अंतरा हिमानी	1,300,000
1,400,000		गुन्ज हिमानी	नेब्रास्कन हिमानी	1,400,000
1,500,000				1,500,000

सारणी-2 : चतुर्थमहाकल्प के हिम तथा अंतरा-हिमयुग

भूमंडलीय जलवायु परिवर्तन तथा उनके प्रभावों की जानकारी हेतु चतुर्थमहाकल्प (क्वार्टनरी काल) के हिमयुग तथा अंतरा-हिमयुगों का विशेष महत्व है। इस काल में प्रमुखतः चार हिमानी तथा चार अंतरा-हिमानी अवधियों का उल्लेख किया जाता है (सारणी-2)। सामान्यतः इस काल की जलवायु खगोलीय बारम्बारता, वायुमंडलीय कार्बन डाइ आक्साइड, भूमंडलीय जैव-भार तथा हिम आयतन द्वारा प्रभावित हुई है। इन परिवर्तनों के मध्य सागर के स्तर तथा गम्भीर जल के तापमान में हुए परिवर्तन भी महत्त्वपूर्ण रहे हैं। इन हिमयुगों के दौरान ध्रुवीय प्रदेशों की धरती पर

लगभग 3 कि. मी. मोटाई तक की बर्फ जमा रहती थी। उत्तरी अमेरिका तथा यूरोप का अधिकांश भाग बर्फ से ढक गया था। साथ ही इन हिमयुगों के शिखर काल में पृथ्वी का औसत तापमान 3 डिग्री सेल्सियस तक कम हो गया था। सामान्यतः एक हिमयुग के समाप्त होने पर हिम-चादर बहुत कम हो जाती थी। बर्फ पिघलने के कारण सागर का जल-स्तर लगभग 100 मीटर से भी अधिक ऊँचा हो चला था। इन स्थितियों का 'कामायनी' में जयशंकर प्रसाद ने कुछ इस प्रकार वर्णन किया है :—

दूर-दूर तक विस्तृत था हिम
स्तब्ध उसी के हृदय समान
नीरवता सी शिला चरण से
टकराता फिरता पवमान
उधर गरजी सिंधु लहरियां
कुटिल काल के जालों सी,
चली आ रही फेन उगलती
फन फैलाये व्यालों सी।
धँसती धरा, धधकती ज्वाला
ज्वालामुखियों के निश्वास
और संकुचित क्रमशः उसके
अवयव का होता था ह्रास।
सबल तरंगाघातों से उस
क्रुद्ध सिंधु के, विचलित सी
व्यस्त महाकच्छप सी धरणी
ऊभ चूभ थी विकलित सी।
बढ़ने लगा विलास वेग सा
वह अति भैरव जल संघात
तरल तिमिर से प्रलय पवन का
होता आलिंगन, प्रतिघात।
लहरें व्योम चूमतीं उठतीं,
चपलायें असंख्य नचतीं
गरल जलद की खड़ी झड़ी में
बूंदे निज संस्तृति रचती।
चपलायें उस जलधि विश्व में
स्वयं चमत्कृत होती थीं
ज्यों विराट बाड़व ज्वालायें
खंड-खंड हो रोती थीं।



चित्र 2 : विगत एक हजार वर्षों में पृथ्वी के तापमान परिवर्तन की प्रवृत्तिया

जलनिधि के तलवासी चलचर
    विकल निकलते उतराते
हुआ विलोड़ित गृह, तब प्राणी
    कौन ! कहाँ ! कब ! सुख पाते ?
उस विराट आलोड़न में, ग्रह
    तारा बुद-बुद से लगते
प्रखर प्रलय पावस में जगमग
    ज्योतिरिंगणों से जगते।

हिमानियों के पिघलने के बाद, जिसे भूविज्ञान की भाषा में 'डीग्लैशियन' कहते हैं जो स्थितियाँ पृथ्वी पर दृष्टिगोचर हुईं उनका जयशंकर प्रसाद ने 'कामायनी' में बहुत ही सुन्दर तथा वैज्ञानिक चित्रण प्रस्तुत किया है—

धीरे-धीरे हिम-आच्छादन
    हटने लगा धरातल से,
जगी वनस्पतियां अलसाई
    मुख धोती शीतल जल से।

नेत्र निमीलन करती मानो
    प्रकृति प्रबुद्ध लगी होने
जलधि लहरियों की अंगड़ाई
    बार-बार जाती सोने।

एक यवनिका हटी, पवन से
    प्रेरित माया पट जैसी
और आवरण-मुक्त प्रकृति थी
    हरी-भरी फिर भी वैसी।

g

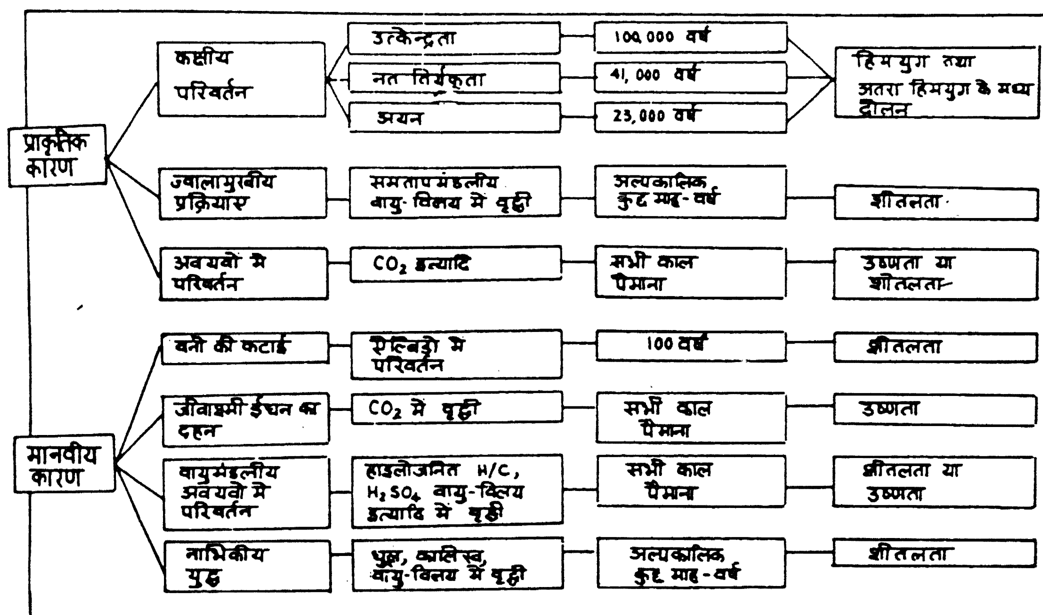
वर्तमान अंतरा-हिमानी (उष्ण काल) में पृथ्वी पर मानव सभ्यता का विकास लगभग लाखों वर्ष पूर्व प्रारम्भ हुआ। ऐसा विश्वास किया जाता है कि वर्तमान अंतरा-हिमानी काल के प्रारम्भ में मानसून प्रबल प्रकृति का था। 4500-3700 वर्ष (ई. पू.) पूर्व सिन्धु घाटी में आज की तुलना में दुगनी वर्षा होती थी। उसके पश्चात् आने वाले सूखे के कारण वृहद हडप्पा संस्कृति का अंत हो गया। 15 से 17वीं सदी का लघु हिमयुग भी विगत 10,000 वर्षों के जलवायु परिवर्तनों का महत्त्वपूर्ण अंश है। ऐसा प्रतीत होता है कि वर्तमान अंतरा-हिमानी काल की तापीय परिस्थितियों में लगातार परिवर्तन होते रहे हैं। 1880 से 1940 तक के सतह-वायु के ताप (चित्र-2) में जो विभिन्नता पायी गयी है वह इस तथ्य की द्योतक है कि पृथ्वी की जलवायु धीरे-धीरे उष्ण होती जा रही है। इस अवधि में आर्कटिक सागर में विद्यमान हिम की मात्रा भी लगभग 10 प्रतिशत तक कम हुयी है तथा हिम-चादर की मोटाई में भी एक-तिहाई की कमी आ गयी है। विश्व के अधिकांश अंचलों

में विद्यमान हिमानियां संकुचित होती जा रही हैं। इसके साथ ही नदियों में बाढ़ का प्रकोप भी बढ़ा है। पिछली सदी में भारत में मानसून द्वारा हुई वर्षा के उतार-चढ़ाव का जब हम अध्ययन करते हैं तो यह ज्ञात होता है कि 1930-1960 के उष्ण काल में सूखा बहुत कम पड़ा जबकि विगत तीन दशकों में ठीक इसके विपरीत सूखा पड़ने की बारम्बारता अधिक रही है। इस नवीन परिवर्तित जलवायु परिस्थितियों में जीव-जन्तु, वनस्पतियों तथा कृषि पैदावार इत्यादि में भी परिवर्तन आया है। जब इन परिवर्तनों की ओर वैज्ञानिकों का ध्यान गया तो इनके कारणों की जांच-पड़ताल प्रारम्भ हुई तथा भविष्य में इन परिवर्तनों के परिणामों की संभावनाओं पर भी गहन विश्लेषण होने लगे। इन अध्ययनों में अवसादी शैलों से प्राप्त संकेत महत्त्वपूर्ण सिद्ध हो रहे हैं।

जलवायु परिवर्तन के महत्त्वपूर्ण कारण

अब यह बात स्पष्ट है कि आज से हजारों-लाखों वर्ष पूर्व की जलवायु तथा वर्तमान सदी की जलवायु में अत्यधिक अन्तर विद्यमान है। इस तथ्य को जयशंकर प्रसाद ने 'कामायनी' में कुछ इस प्रकार कहा है —

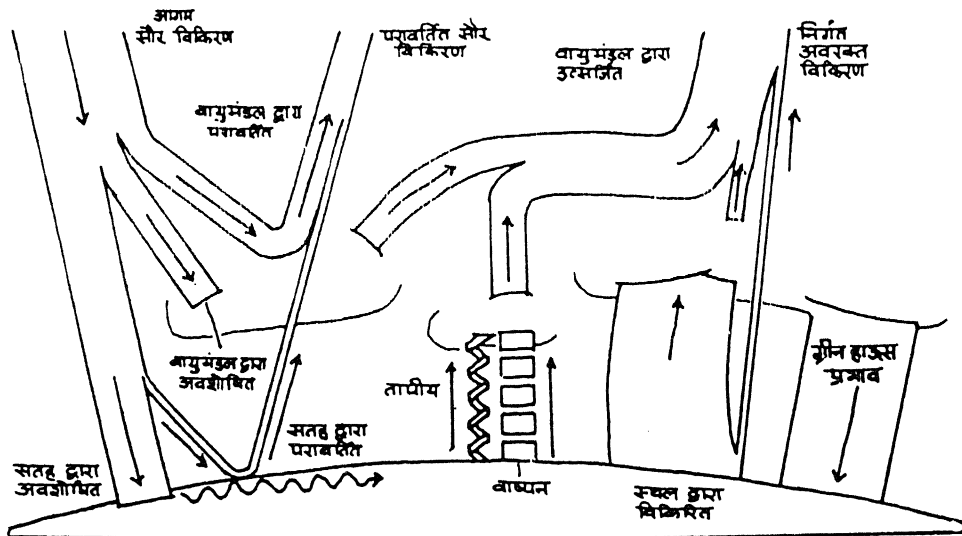
पुरातनता का यह निर्मोक
    सहन करती न प्रकृति पल एक;
नित्य नूतनता का आनंद
    किये है परिवर्तन में टेक !



सारणी 3 जलवायु परिवर्तन के कारण तथा उनके प्रभाव

इस अंतर के लिये कौन से कारण जिम्मेदार हैं ? इन कारणों तथा उनके प्रभावों को सारणी-3 में प्रस्तुत किया गया है। अब जलवायु परिवर्तन के प्राकृतिक कारणों के साथ-साथ मानवीय कारण भी महत्त्वपूर्ण हो गये हैं क्योंकि मानव के आर्थिक एवं औद्योगिक विकास की प्रक्रियाओं के कारण पृथ्वी के वायुमंडल के रासायनिक संघटन में महत्त्वपूर्ण परिवर्तन हुए हैं। जीवाश्मी ईधन के दहन, वनों की लगातार कटाई, जैवभार में वृद्धि, विभिन्न रसायनों के प्रयोग में वृद्धि तथा मिट्टी का बढ़ता कटाव इत्यादि का वायुमंडल के रासायनिक संघटन पर सीधा प्रभाव देखा गया है। जयशंकर प्रसाद ने 'कामायनी' में बहुत ही बेबाक ढंग से कहा है—

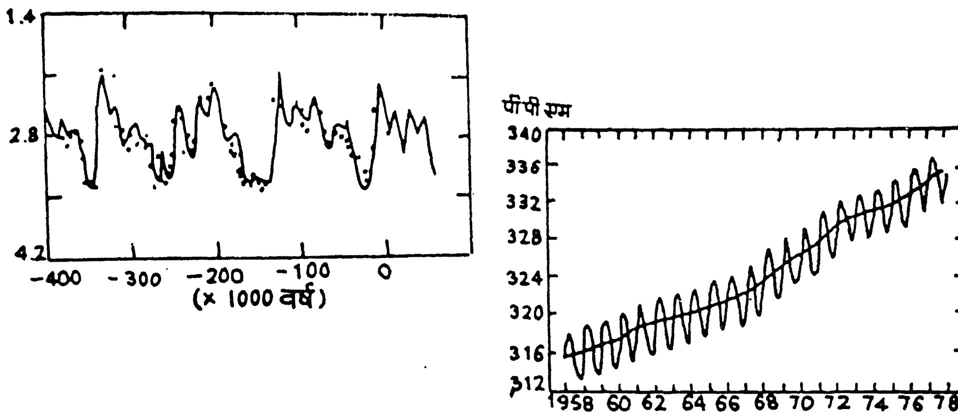
स्वयं देव थे हम सब, तो फिर
क्यों न विश्रृखंल होती सृष्टि
अरे अचानक हुई इसी से
कड़ी आपदाओं की वृष्टि।



चित्र 3. पृथ्वी- वायुमण्डल ऊर्जा व्यवस्था

इन रासायनिक परिवर्तनों के कारण वायुमंडल गर्म हुआ है जिसके प्रभाव में वर्षा तथा वायु की प्रवृत्ति में बदलाव आया है। इन सबके परिणामस्वरूप भूमंडलीय जैव व्यवस्था, कृषि, जलस्रोत तथा सागर के स्तर में भी महत्त्वपूर्ण परिवर्तन हुए हैं। आखिर इन कारणों से वायुमंडल गर्म कैसे होता है ? सही में पृथ्वी के वायुमंडल तथा जलवायु के परिसंचरण के लिये सूर्य का विकिरण ऊर्जा का प्रमुख स्रोत है। चूंकि सूर्य बेहद गर्म है इसलिए जो भी सौर विकिरण पृथ्वी तक पहुँचता है

वह लघु तरंग क्षेत्रों में सान्द्रित हो जाता है। इस ऊर्जा का कुछ अंश वायुमंडल द्वारा अंतरिक्ष में परावर्तित कर दिया जाता है। पृथ्वी के सतह की यह परवर्तनशीलता (एल्बिडो) यह निर्धारण करती है कि इस विकिरण का कितना अंश सतह द्वारा अवशोषित हो सकता है। इसी के अनुसार पृथ्वी-वायुमंडल व्यवस्था ऊर्जा को अंतरिक्ष में परावर्तित करती है। यह स्थलीय परावर्तन दीर्घ तरंगों की लम्बाई पर सान्द्रित होती है क्योंकि सूर्य की तुलना में पृथ्वी बहुत ही शीतल है। स्थलीय विकिरण को वायुमंडल अवशोषित कर लेता है तथा उसके कुछ अंश को अंतरिक्ष में परावर्तित करता है तथा कुछ अंश पृथ्वी पर परावर्तित होकर लौट आती है (चित्र 3)। पृथ्वी की वक्रता, अक्ष पर झुकाव तथा गोलाकार स्वरूप के कारण सौर विकिरण का अक्षांशीय तथा ऋतु सम्बन्धी उतार-चढ़ाव निर्भर करता है। सौर विकिरण का अधिकतम प्रभाव भूमध्यरेखीय अंचलों में तथा निम्नतम ध्रुवीय क्षेत्रों में पाया जाता है।



चित्र 4. आक्सीजन आइसोटोप तथा पृथ्वी के कक्षीय प्राचलों का सम्बन्ध

आजोन को छोड़ कर, वायुमंडल के अधिकांश गैसीय अवयव पृथ्वी पर आने वाली सौर विकिरण के लिये पारदर्शी हैं। ओजोने के कारण ही सौर विकिरण की हानिकारक पराबैंगनी किरणों से पृथ्वी की सुरक्षा हो पाती है। जब यह निर्गमित स्थलीय दीर्घ तरंग विकिरण के समीप आती हैं तो वायुमंडल बिलकुल ही भिन्न प्रकार से व्यवहार करता है। यही वह सबसे बड़ी उपलब्धि है जो पृथ्वी को उसके वायुमंडल के कारण उसे प्राप्त है। दो गैसीय अवयव, कार्बन डाइ आक्साइड तथा जलवाष्प, यद्यपि वायुमंडल में बहुत कम मात्रा में उपस्थित होते हैं परन्तु वे बड़ी सतर्कता से पृथ्वी की सतह से वापस जाने वाली सौर विकिरण की अधिकतम मात्रा को रोकने में सक्षम होते हैं। यदि वायुमंडल का व्यवहार इस प्रकार का न होता तो आज पृथ्वी की सतह का तापमान-18 डिग्री सेल्सियस (पानी के जमाव बिन्दु से बहुत नीचे) होता। अवरक्त विकिरण इन दो पारदर्शी गैसीय अवयवों के कारण ताप के लिए वायुमंडल में एक कम्बल जैसी भूमिका प्रस्तुत करती है परन्तु सौर विकिरण को अन्दर आने भी देती है। इस प्रक्रिया को ''ग्रीन हाउस प्रभाव'' के नाम से जाना जाता है। इन गैसीय अवयवों की सान्द्रता में हुई वृद्धि ''ग्रीन हाउस प्रभाव'' को और भी त्वरित करती है जिसके परिणामस्वरूप पृथ्वी-वायुमंडल व्यवस्था में उष्णता और भी बढ़ेगी।

सामान्यतः पृथ्वी-वायुमंडल व्यवस्था उतनी ही सौर ऊर्जा को प्राप्त करती है जितनी वह उत्सर्जित कर सकती है। अब ऐसा विश्वास किया जाने लगा है कि जलवायु में होने वाले परिवर्तन प्रमुखतः पृथ्वी पर आने वाले सौर विकिरण द्वारा नियंत्रित होते हैं। धरती की सतह पर सौर विकिरण की जो मात्रा अवशोषित होती है वह मरुस्थलीय परिस्थितियों में बहुत कम होती जाती है जब कि बर्फीले अंचलों में यह बढ़ जाती है। यह एल्विडो की अधिकता से कारण होता है। इसके साथ ही धरती की सतह पर होने वाले परिवर्तन भी सौर विकिरण को प्रभावित करते हैं जिनका प्रभाव अंततः वायुमंडल तथा वर्षा की मात्रा पर भी पड़ता है। वायुमंडल में उपस्थित धूल-कालिख (एयरोसोल) की मात्रा तथा बादल भी सौर विकिरण के परावर्तन को प्रभावित करते हैं। जब इन अवयवों की मात्रा बढ़ जाती है तब सौर विकिरण का परिवर्तन भी बढ़ जाता है। इनके अतिरिक्त ज्वालामुखी उद्गारों द्वारा सूक्ष्मकणी पदार्थ तथा संघनित होने वाली गैसों की मात्रा भी वायुमंडल के एयरोसोल को बढ़ाने में सहायक होती है। इनमें से कुछ पदार्थ वायुमंडल से बाहर होकर पृथ्वी की सतह पर आ जाते हैं परन्तु अति सूक्ष्मकणी अवयव तथा सल्फ्यूरिक एसिड जैसे एयरोसोल उपरि वायुमंडल में बहुत अधिक दिनों तक बने रहते हैं। पृथ्वी की शीतलता इनके कारण भी बढ़ती है। जब किसी क्षेत्र में ज्वालामुखी का उद्गार बहुत अधिक होता है तो वहाँ के तापमान में विशेष कमी आंकी गयी है। इसी प्रकार यदि पृथ्वी पर कोई बहुत बड़ा नाभिकीय युद्ध होता है तो उससे वायुमंडल में पहुँचने वाले अवयव पृथ्वी के जलवायु को शीतल ही करेंगे। नाभिकीय युद्ध के कारण पृथ्वी पर ठंडक अचानक बढ़ जायेगी जिसे वैज्ञानिक भाषा में 'नाभिकीय शीत ऋतु' की संज्ञा दी जाती है।

कार्बन डाइ आक्साइड एक 'ग्रीन हाउस' अणु है जो पृथ्वी को उष्मा-रोधी बनाने में बहुत महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाता है। इस प्रकार कार्बन डाइ आक्साइड की मात्रा में होने वाला कोई भी उतार-चढ़ाव पृथ्वी की जलवायु को प्रभावित करने में सक्षम है। यह देखा गया है कि विगत तीन दशकों में कार्बन डाइ आक्साइड की मात्रा वायुमंडल में बहुत तेजी से बढ़ती जा रही है। जीवाश्मी ईंधन का दहन तथा वनों की कटाई इसके दो प्रमुख कारण हैं। वायुमंडल में कार्बन डाइ आक्साइड की वृद्धि के कुछ अन्य कारण भी हो सकते हैं परन्तु इन सब के परिणामस्वरूप पृथ्वी की उष्णता बढ़ती ही जा रही है। ऐसा अनुमान लगाया गया है कि यदि 'ग्रीन हाउस' गैसों की मात्रा दुगुनी हो जाती है तो पृथ्वी के तापमान में दो से चार डिग्री सेल्सियस की वृद्धि हो जायेगी।

इस कहानी का एक दूसरा पहलू भी है। रोचक तथ्य यह है कि एक ओर तो औद्योगीकरण, जीवाश्मी ईंधन के दहन तथा वनों की कटाई में वृद्धि होने से वायुमंडल में कार्बन डाइ आक्साइड की मात्रा बढ़ी है पर दूसरी ओर पिछले बीस-पच्चीस वर्षों की अवधि में पृथ्वी की जलवायु शीतल रही है। यह शीतलता 1960 में कुछ अधिक ही थी। इसका तात्पर्य यह हुआ कि जलवायु में बढ़ने वाली उष्णता औद्योगिक क्रांति के पहले से विद्यमान थी और उसे केवल मानवीय कार्य-कलापों से ही नहीं जोड़ा जा सकता। 1945 से अब तक पृथ्वी के तापमान में निरंतर कमी ही पायी गयी है। अतः हमें मानवीय क्रियाओं के साथ-साथ जलवायु परिवर्तन के प्राकृतिक कारणों पर भी ध्यान देना होगा।

जलवायु की भविष्यवाणी

भूमंडलीय जलवायु की भविष्य की संभावनाओं तथा परिणामों पर विगत कुछ वर्षों से विचार-विमर्श तथा शोधकार्य होने लगा है। तो क्या भूमंडलीय जलवायु के विषय में कोई सटीक भविष्यवाणी की जा सकती है ? अभी हाल में ही सागर-संस्तर कोरों के आक्सीजन आइसोटोप के अध्ययन द्वारा पृथ्वी के पुरा-तापमान को ज्ञात किया गया है। इस पुरा-तापमान तथा पृथ्वी के कक्षी प्राचलों के मध्य उच्चकोटि का सहसम्बन्ध मिलता है (चित्र 4)। इस सहसम्बन्धन के आधार पर यह प्रतिपादित किया जा रहा है कि आने वाले 60,000 वर्षों में पृथ्वी पर पुनः हिमयुग प्रारम्भ होगा। यदि इस हिमयुग के आने में विलम्ब होता है या यह आता ही नहीं तो इसके लिए विभिन्न मानवीय कारण ही उत्तरदायी होंगे। आने वाले हिमयुग में पृथ्वी की जलवायु किस प्रकार की होगी और यह परिवर्तन कब होगा ऐसे प्रश्नों का उत्तर देना सरल नहीं है क्योंकि जलवायु परिवर्तन एक बहुत ही जटिल प्रक्रिया है। सामान्यतः यह परिवर्तन, हिम-जलवायु को नियंत्रित करने वाली विभिन्न प्रक्रियाओं तथा उनके प्रभावों से संबंधित मूलभूत आंकड़ों को एकत्रित करना होगा।

इन आँकड़ों का संगणकों की सहायता से विश्लेषण कर, जलवायु परिवर्तन सम्बन्धी कुछ ऐसे माडल तैयार करने होंगे जो कि जलवायु की सम्पूर्ण जटिलता की सुस्पष्ट विवेचना तथा भविष्यवाणी करने में सक्षम हों। वैसे, जलवायु, परिवर्तनों के भविष्य की प्रवृत्तियों के सम्बन्ध में अभी से कोई सरल समीकरण प्रस्तुत करना व्यवहारिक प्रतीत नहीं होता।

जलवायु परिवर्तन के संकेत स्रोत

भूमंडलीय जलवायु की प्रक्रियाएं इतनी वृहद एवं जटिल हैं कि उन्हें जैसा का तैसा प्रयोगशाला में उतारा नहीं जा सकता। परन्तु जलवायु परिवर्तनों के संकेत विभिन्न स्रोतों से एकत्र किये जा सकते हैं। इन संकेतों के आधार पर जलवायु सम्बन्धी विश्लेषण तथा आकलन परोक्ष रूप से प्रस्तुत किये जा सकते हैं। विगत कुछ वर्षों से वैज्ञानिकों ने जलवायु मॉडलों के निर्धारण में पुरा-जलवायु सम्बन्धी आंकड़ों का प्रयोग प्रारम्भ किया है जिसके उत्साहपूर्वक परिणाम सामने आने लगे हैं। जलवायु परिवर्तनों काल-चक्र के संदर्भ में जयशंकर प्रसाद ने 'कामायनी' में लिखा है—

प्रहर दिवस कितने बीते, अब
इसको कौन बता सकता,
इनके सूचक उपकरणों का
चिन्ह न कोई पा सकता।

परन्तु ऐसा नहीं है।

भूमंडल पर प्राप्त होने वाले विभिन्न प्रकार के अवसादी शैल तथा उनके निक्षेपण इतिहास को नियंत्रित करने वाली विभिन्न भौतिक, रासायनिक तथा जैविक प्रक्रियाएं पुरा-जलवायु सम्बन्धी आंकड़ों के प्रमुख स्रोत सिद्ध हो रहे हैं।

सारणी 4 : पुरा जलवायु के आंकड़ा स्रोतों के प्रमुख अभिलक्षण

आंकड़ा स्रोत	आकलित प्राचल	भौगोलिक क्षेत्र	जलवायु सम्बन्धी विवेचना
सागरीय अवसाद	प्लवकीय तथा नितलस्थ जीवाश्मों का आइसोटोपीय संघटन, प्राणीजात तथा वनस्पतिजात समुच्चय, जीवाश्मों के स्वरूपीय अभिलक्षण खनिजीय संघटन तथा वितरण	सभी सागर महाद्वीपीय सीमान्त तथा तटीय क्षेत्र	भूमंडलीय हिम आयतन, सतह का तापमान तथा लवणता, तल का तापमान तथा जल-अभिवाह, समीपस्थ स्थल की शुष्कता, वायु वेग तथा दिशा
हिमकोर	आक्सीजन आइसोटोप संघटन तथा सूक्ष्म तत्व रसायन	ध्रुवीय तथा एल्पाइन क्षेत्रों की हिमानियां	तापमान, हिम इकट्ठा होने की दर, वायुमंडलीय संघटन, पंकता, हिम-मोटाई तथा सौर विकिरण का प्रभाव
पर्वतीय हिमानियां	हिमानियों का स्तर तथा स्थितियां, ऊंचाई	45° दक्षिण से 70° उत्तर	तापमान, वर्षा
आवृत्त बेसिन सरोवर	सरोवर-स्तर	निम्न से मध्य अक्षांशीय क्षेत्र (शुष्क तथा उप शुष्क पर्यावरण)	उपलब्ध नमी/वर्षा
दलदल या सरोवरी अवसाद	कीट समुचच्य संघटन	सभी महाद्वीप	तापमान, वर्षा, मृदा नमी, वायुराशि बारम्बारता
वार्ब अवसाद	भूरासायनिक तथा अवसादी संघटन	मध्य से उच्च अक्षांश	
वृक्ष वलय	वलय मोटाई, घनत्व, आइसोटोपीय संघटन	मध्य तथा उच्च अक्षांश महाद्वीप	तापमान, वर्षा, मृदा नमी
ऐतिहासिक रिकार्ड	घटना-विज्ञान, मौसम संलेख, नौकायन संलेख इत्यादि	भूमंडल	विभिन्न

सारणी-4 में पुरा-जलवायु सम्बन्धी जानकारी के कुछ प्रमुख स्रोतों के अभिलक्षण प्रस्तुत किये गये हैं। इस दिशा में हुए उल्लेखनीय शोधकार्यों से यह सिद्ध हो गया है कि अवसादी शैलों के विभिन्न अभिलक्षणों का परीक्षण न केवल वर्तमान की जलवायु वरन् पूर्व-कैम्ब्रियन काल तक ही जलवायु के विषय में सूचने देने में सक्षम हैं। परागाणुओं, वृक्ष-वलय, हिम कोर, आइसोटोप

तथा भूरासायनिक प्राचलों का अध्ययन भी उपयोगी सिद्ध हुआ है। इन अध्ययनों का उद्देश्य भौमिकीय काल-क्रम में भूमंडलीय जलवायु परिवर्तनों की प्रकृति, अवधि, कारण तथा प्रभावों तक पहुंचना है जिससे समकालीन तथा भविष्य के जलवायु के विश्लेषण में सुविधा हो सके।

अवसादी शैलों से प्राप्त संकेतों के माध्यम से जलवायु का सीधा-सीधा आंकलन करना तो संभव नहीं है परन्तु अनुमान लगाया जा सकता है। मृदा तथा मृत्तिका की खनिजकी तथा रासायनिक संघटन को जलवायु विशेष रूप से प्रभावित करती है। आर्द्र जलवायु में रासायनिक अपरदन की दर अत्यधिक होती है तथा प्रारम्भिक खनिजों का पूर्ण विघटन हो जाता है। जिन स्थानों पर निम्न से सामान्य दर की वर्षा होती है वहाँ पर अस्थायी खनिज अत्यधिक मात्रा में प्राप्त होते हैं। किसी स्थान विशेष की स्थलाकृति भी रासायनिक अपरदन की गति को नियंत्रित करने में महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाती है। अवसादों की प्रसारण प्रक्रिया पर भी जलवायु का प्रभाव पड़ता है। इसके अतिरिक्त तापमान, वर्षा तथा वनस्पति इत्यादि का प्रभाव भी अवसादों के स्थूल-रासायनिक संघटन पर पड़ता है। निवर्तनिक प्रक्रियाएँ भी अवसादों के स्थूल संघटन को नियंत्रित करती हैं।

सागरीय, सरोवरी, हिमनदी तथा जलोढ़ी अवसादों के अतिरिक्त मृदा-प्रोफाइलों तथा मरुस्थलीय प्रक्रियाओं का अध्ययन महत्त्वपूर्ण आंकड़े प्रदान करते हैं। मरुस्थलीय प्रक्रियाओं का जलवायु परिवर्तनों के अध्ययन में अपना अलग महत्व है। प्राचीन प्लाया निक्षेप, लोयस, जीवाश्मी मृदा, कंदरा-निक्षेप तथा मरुस्थलीय वारनीस, पुरा जलवायु सम्बन्धी आंकड़ों के प्रमुख स्रोत हैं। मृत्तिका, लायस-पैलियोसोल, पीट, कोयला, वाष्पनज खनिज, टिलाइट तथा कार्बोनेट अवसादों की खनिजकी, गठन विन्यास तथा सम्पूर्ण रासायनिक संघटन जलवायु के प्रति संवेदनशील पाये गये हैं। इन अवसादी निक्षेपों का वितरण न केवल उचित जलवायु की उपस्थिति वरन् उचित भूभौगोलिक विन्यास पर भी निर्भर करती है। अवसादी शैलों के वितरण की विभिन्न फेसीज भी जलवायु परिवर्तनों की द्योतक है।

पैलियोसोल की पहचान, उनका शैलीभवन, अपरदन तथा अपक्षयन की समस्याओं पर भी ध्यान देने की आवश्यकता है। लोयस-पैलियोसोल संस्तरों से सेनोजोइक काल के जलवायु के सम्बन्ध में विस्तार से जानकारी उपलब्ध होने की प्रचुर संभावनाएं विद्यमान हैं। इसके अतिरिक्त सागरीय एवं सरोवरी अवसादों के कोरों के अध्ययन द्वारा जैविक, रासायनिक, आइसाटोपीय, चुम्बकीय तथा अन्य भौतिक अभिलक्षणों में हुए निरंतर परिवर्तनों के संकेत हमें मिल सकते हैं। हिम-सागरीय अवसाद, सागर तट की अवसादी प्रक्रियाएं तथा हिमानी व्यवस्था के अध्ययन द्वारा एकत्र आंकड़े सामान्यतः गुणात्मक परिवर्तमों के मॉडल बनाने में निर्णायक आधार का काम करेंगे।

समकालीन हिमानियों के अध्ययन द्वारा हमें अभिनव काल (होलोसीन) की जलवायु में हुये उतार-चढ़ाव को समझने में सुविधा रहेगी। हिमानी तथा हिम-जलोढ़ी अवसादों की स्मृति, स्थलाकृति तथा संस्तरण-क्रम के सम्बन्ध में एकत्र किये गये आंकड़े जलवायु में हिमानियों द्वारा उत्पन्न परिवर्तनों के विषय में संकेत देने में सक्षम होंगे। इन अवसादों के विगोपन सरलता से उपलब्ध हो जाते हैं और इनका आयु निर्धारण करना भी सुगम है। वैसे पुरा-जलवायु के संकेत उपलब्ध कराने में

जलीय अवसादों का भी विशेष महत्त्व है। दलदली, कच्छीय तथा सरोवरी अवसादों में इन संकेतों का खोजा जाना अनिवार्य है।

आजकल जलवायु परिवर्तन के अध्ययनों में आइसोटोप संरचना की भी सहायता ली जा रही है। ऑक्सीजन आइसोटोप वक्र की सहायता से पुरा तापमान की विवेचना की जा सकती है। अवसादों के आइसोटोप-रसायन आंकड़ों के आधार पर सागरीय तथा महाद्वीपीय जलवायु प्रक्रियाओं के मध्य तुलनात्मक अध्ययन करने में सरलता होगी। इसके अतिरिक्त विभिन्न तकनीकों द्वारा जलवायु परिवर्तनों की आयु (समय) का निर्धारण भी किया जाने लगा है। साथ ही साथ अवसादों में प्राप्त होने वाले जीवाश्म तथा परागाणु, अवसादों के कण-विश्लेषण, अवसादों की सतह पर उभरे विभिन्न विन्यास, यातायात माध्यम की प्रकृति तथा निक्षेपण बेसिन के विभिन्न भौतिक-रासायनिक पर्यावरणीय परिस्थितियों से परिचित कराते हैं।

आधुनिक तथा प्राचीन अवसादी शैलों का तुलनात्मक अध्ययन जलवायु परिवर्तनों के निर्धारण में सहायक रहे हैं क्योंकि स्तृतिय अभिलेखों के विकास पर जलवायु का सीधा नियंत्रण पाया गया है। इस प्रकार अश्मीय अभिलेख जलवायु के सम्बन्ध में उचित आधार तथा विन्यास प्रदान करते हैं। इन सब की विवेचना करके हम समकालीन तथा कुछ सीमा तक भविष्य की जलवायु की प्रवृत्तियों को समझ सकते हैं। यूं तो अश्म-अभिलेखों का विस्तार 3.8 अरब वर्ष तक फैला हुआ है परन्तु विगत दो लाख वर्ष के अंतराल में निक्षेपित क्वार्टरी काल के अवसादों का जलवायु सम्बन्धी अध्ययनों में विशेष महत्व है। इसमें भी विगत 30,000 वर्ष पूर्व तक के अवसादों पर विशेष ध्यान देने की आवश्यकता है। यही वह समय है जब इस अंतरा-हिमानी काल में हिम-चादर विलुप्त हुये तथा मानव जनसंख्या का विस्फोटक विकास हुआ। सागरीय तथा महाद्वीपीय जीव-जन्तु, वनस्पति, जलवायु, पुरा भौगोलिक स्थितियों तथा जैव-रासायनिक चक्र, कुछ ऐसे क्षेत्र हैं जो इस अवधि के जलवायु के अध्ययन में एक चुनौती के रूप में हमारे समक्ष उपस्थित होते हैं।

अभी तक के उपलब्ध आंकड़े बहुत विस्तृत हैं तथा एक स्थान से दूसरे स्थान तक फैले हुये हैं जिसके कारण अभी भी इनका ठीक-ठीक सहसम्बन्ध स्थापित नहीं हो पाया है। परन्तु आधुनिक वैज्ञानिक तकनीकों के विकास से आशा की नई किरणें फूटी हैं जिनको व्यवहार में लाने पर यह कमी पूरी की जा सकती है। संगणकों का प्रयोग नवीन मॉडलों को बनाने में सहायक हो रहा है।

एक और महत्त्वपूर्ण तथ्य है— कार्बन चक्र जिस पर ध्यान देना आवश्यक है। जलवायु परिवर्तनों का भौमिकीय इतिहास तथा कार्बन चक्र में हो रहे परिवर्तनों के अध्ययन हमें भविष्य की जलवायु प्रतिपादित करने में सहयोगी ही नहीं वरन् एक नवीन दृष्टि भी प्रदान कर सकते हैं। कार्बन चक्र तथा भूमंडलीय जलवायु को एक ही इकाई के रूप में लिया जाना चाहिये।

यहाँ मैं यह उल्लेख करना आवश्यक समझता हूँ कि पुरा जलवायु सम्बन्धी विश्लेषणों से हमें प्रत्यक्ष तथा अप्रत्यक्ष दोनों ही प्रकार के आंकड़ों को ध्यान में रखना होगा जिनमें प्रकृति में घटित घटनाएं तथा मानवनिर्मित प्रभाव दोनों ही सम्मिलित हों। भविष्य के वैज्ञानिक शोध संभवतः

हमें कोई नई राह दिखा सकें और हम भूमंडलीय जलवायु परिवर्तनों को अपने अनुरूप करने में सफल हो सकें।

इस परिप्रेक्ष्य में हिमालय जैसी तरुण तथा जटिल पर्वत श्रृंखला के क्वार्टरी जलवायु परिवर्तनों का अध्ययन अति महत्त्वपूर्ण है। इस प्रकार एकत्र अंकड़े हमें केवल हिमालय ही नहीं वरन् सम्पूर्ण भारतीय उपमहाद्वीप तथा हिमालय के उत्तर में स्थित भूखण्डों के जलवायु परिवर्तन मॉडलों को बनाने में सहायक सिद्ध होंगे। इन तथ्यों के प्रति 'कामायनी' में जयशंकर प्रसाद की दृष्टि देखें —

दृष्टि जब जाती हिम-गिरि ओर
प्रश्न करता मन अधिक अधीर,
धरा की यह सिकुड़न भयभीत
आह, कैसी है ? क्या है पीर ?

हिमालय के करेवा (कश्मीर), कांगड़ा एवं सुन्दर नगर (हिमाचल प्रदेश), दून घाटी (उत्तरांचल), स्पीति (हिमाचल प्रदेश) तथा कई एक नदी-घाटियों में वैज्ञानिकों द्वारा बहुविषयक शोधकार्यों के परिणाम अत्यन्त ही उत्साहवर्धक सिद्ध हो रहे हैं। हिमानी तथा अन्तरहिमानी चक्रों का निर्धारण, अवसादन पर्यावरण, तापीय स्थितियां, विवर्तनिकी एवं जलवायु द्वारा नियंत्रित स्थलाकृतियों का विकास, पेरीग्लेशियल परिस्थितियों तथा नवहिमानी अभिलक्षणों के सम्बन्ध में एकत्र आंकड़ों का विश्लेषण तथा विवेचना वैज्ञानिक करने में लगे हुए हैं। इस दिशा में आइसोटोप, भूरसायन, परागाणु, अवसादनीय तथा अन्य प्राचलों का प्रयोग कर हिमालय के विभिन्न क्षेत्रों में चतुर्थ महाकल्प के दौरान हुए जलवायु परिवर्तनों का सहसम्बन्ध स्थापित कर इसे विस्तृत रूप से भारतीय उपमहाद्वीप के अन्य अंचलों तथा विश्व के प्रमुख क्षेत्रों के साथ तुलनात्मक अध्ययन कर, भूमंडलीय जलवायु परिवर्तनों के परिप्रेक्ष्य में रखा जा सकता है। यह कोई सरल तथा बहुत कम समय में होने वाला कार्य नहीं है। इसके लिये विभिन्न विषयों के विशेषज्ञ वैज्ञानिकों के पूरे दल को क्षेत्रीय कार्य तथा प्रयोगशाला में लगातार लगना होगा। तभी हम हिमालय जैसे वृहद् विस्तार वाले दुर्गम पर्वत श्रृंखला के चतुर्थमहाकल्प की विभिन्न भूगतिक एवं जलवायु-परिवर्तन सम्बन्धी जटिलताओं को समझ सकने में सक्षम होंगे तथा इस काल की प्रमुख घटनाओं का क्रम तथा आयु निर्धारित कर सकेंगे।

मैं अपने व्याख्यान को जयशंकर प्रसाद द्वारा 'कामायनी' में लिखे इन शब्दों के साथ समाप्त करता हूँ—

प्रकृति रही दुर्जेय, पराजित
हम सब थे भूले मद में;
भोले थे, हाँ तिरते केवल
सब विलासिता के नद में।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 44, No. 4, October 2001.

ली ग्रूप से सम्बद्ध जैकोबी बहुपदों द्वारा प्रस्तावित द्विलाम्बिक बहुपदों के लिए जनक फलन

पी० एल० सेठी तथा पी० के० प्रजापत
गणित तथा सांख्यिकी विभाग, जैनारायण व्यास विश्वविद्यालय, जोधपुर (राज०)

[प्राप्त–जनवरी 3, दिसम्बर 12, 2001]

सारांश

इस प्रपत्र में सिंघल तथा सविता कुमारी द्वारा प्रदत्त द्विलाम्बिक बहुपद $W_n^{(\alpha,\beta)}(x;\ k)$ का प्रयोग किया गया है जिसके सम्प्रयोग से कुछ नवीन जनक फलन मिले हैं। इसी द्विलाम्बिक बहुपद के लिए **B** तथा **C** आपरेटरों का निर्धारण हुआ है।

Abstract

Generating function for biorthogonal polynomials suggested by Jacobi polynomials associated with *Lie Group*. *By* P. L. Sethi and P. K. Prajapat, Department of Mathematics and Statistics, Jai Narain Vyas University, Jodhpur (Raj).

In this paper the authors have used biorthogonal polynomial $W_n^{(\alpha,\beta)}(x;\ k)$ suggested by Jacobi polynomial due to Singhal and Savita Kumari, where applications give certain new generating functions by $W_n^{(\alpha,\beta)}(x;\ k)$ using representation theory of Lie groups. Further we also wish to determine the existence operators B and C for the same biorthogonal polynomial $W_n^{(\alpha,\beta)}(x;\ k)$.

1. प्रस्तावना

वीजनर ने[4] ने ऐसे फलकों के सेटों के लिए जनक फलन प्राप्त करने की विधि निकाली है जो कतिपय शर्तों को तुष्ट करते हैं। ऐसे फलनों में से हर्माइट तथा गेगेनबावर तथा वीजनर[5] द्वारा इन शर्तों की तुष्टि होती है।

2. अवकल समीकरण

इस द्विलाम्बिक बहुपद

$$W_n^{(\alpha,\beta)}(x;k) = \frac{(1+\alpha)_n}{n!} \sum_{j=0}^{n} \frac{(-n)_j (1+\alpha+\beta+n)_{kj}}{j!(1+\alpha)_{kj}} \left[\frac{1-x}{2}\right]^{kj} \tag{2.1}$$

के लिए जनक फलन प्राप्त करने तथा हापरज्यामितीय रूप

$$W_n^{(\alpha,\beta)}(x;k) = \frac{(1+\alpha)_n}{n!} {}_{k+1}F_k\left[\begin{matrix} -n, \Delta(k, 1+\alpha+\beta+n); \left(\frac{1-x}{2}\right)^k, \\ \Delta(k, 1+\alpha); \end{matrix}\right] \tag{2.2}$$

जहाँ $\Delta(d, a)$ पैरामीटरों का सेट है।

$$\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\alpha+1}{\delta}, \ldots, \frac{\alpha+k-1}{\delta}.$$

यह बहुपद निम्नांकित अवकल आवर्तन सम्बन्धों को तुष्ट करता है जहाँ पर नीचे लिखे अंक अनृण पूर्णांक हैं।

$$\frac{d}{dx} W_n^{(\alpha,\beta)}(x;k) = \frac{k}{x-1}\Big[nW_n^{(\alpha,\beta)}(x;k) - (\alpha+n)\, W_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x;k)$$

$$- \frac{(\alpha+n)}{(\alpha+\beta+n)} \frac{d}{dx} W_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x;k)\Big] \tag{2.3}$$

और दूसरा रूप है—

$$\frac{d}{dx} W_n^{(\alpha,\beta)}(x;k) = \frac{(\alpha+\beta+n+1)}{(\alpha+n+1)}\Big[(n+1)\, W_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x;k)$$

$$-(\alpha+n+1)\, W_n^{(\alpha,\beta)}(x;k) - \frac{(x-1)}{k} \frac{d}{dx} W_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x;k)\Big] \tag{2.4}$$

यहाँ पर $W_n^{(\alpha,\beta)}(x;k)$ की परिभाषा से हम आसानी से देख सकते हैं कि ये बहुपद निम्नांकित सम्बन्ध द्वारा सृजित होते हैं—

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+\alpha+\beta)}{(1+\alpha)_n} W_n^{(\alpha,\beta)}(x;k)\, t^n = (1-t)^{-1-\alpha-\beta}\, G\left[\frac{-(1-x)^k t}{2^k (1-t)^{k+1}}\right] \tag{2.5}$$

जहाँ

$$G(Z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1+\alpha+\beta)_{(k+1)j}}{(1+\alpha)_{kj}\, j!} Z^j \tag{2.6}$$

हम ऐसा जनक फलन $G(x\,;\,y)$ की खोज करते हैं जो जनक फलन की परिभाषा से निम्नांकित रूप में अभिव्यक्त होना चाहिए

$$G(x\,;\,k) = \sum_j g_j Z^j y^{kj-k+1}$$

जहाँ g_j x तथा y से स्वतंत्र है किन्तु वह पैरामीटर α तथा β पर निर्भर हो सकता है।

3. रैखिक अवकल आपरेटर

रैखिक अवकल आपरेटर W या $\Psi(x)$ W के साथ क्रम विनिमय करेंगे जहाँ $\Psi(x)$ x का कोई फलन है जिसे ज्ञात करना होगा। माना कि **C** ऐसा ही एक आपरेटर है। माना कि

$$C = C_1(x\,;\,y)\frac{\partial}{\partial x} + C_2(x\,;\,y)\frac{\partial}{\partial y} + C_0(x\,;\,y)$$

जहाँ $C_i\,(i = 0,\, 1,\, 2)$ फलन है **x** तथा **y** का जो **n** के प्रति स्वतन्त्र है किन्तु यह आवश्यक नहीं कि वह पैरामीटर $\propto$ तथा β से भी स्वतन्त्र हो। प्रथम कोटि का प्रत्येक रैखिक अवकल आपरेटर एक पैरामीटर ली ग्रुप का सृजन करता है।

प्रमेय 3.1

द्विलाम्बिक बहुपद के लिए अब हम प्रथम कोटिक रैखिक अवकल आपरेटर **B** तथा **C** ज्ञात करेंगे जिससे कि

(i) $$B\left[W_n^{(\alpha,\beta)}(x\,;\,k)\, y^{kn-k+1}\right]$$

$$= \left[b_n W_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x\,;\,k) + c_n D_x W_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x\,;\,k)\right] y^{kn-k+1}$$

(ii) $$C\left[W_n^{(\alpha,\beta)}(x\,;\,k)\, y^{kn-k+1}\right]$$

$$= \left[a_n W_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x\,;\,k) - b_n D_x W_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x\,;\,k)\right] y^{kn-k+1}$$

जहाँ $$D_x = \frac{d}{dx}$$

उपपत्ति (i) : माना कि

$$B = B_1(x;y)\frac{\partial}{\partial x} + B_2(x;y)\frac{\partial}{\partial y} + B_0(x;y)$$

(2.3) की सहायता से

$$B = B_1\frac{\partial}{\partial x}\left[W_n^{(\alpha,\beta)}(x;k)y^{kn-k+1}\right] + B_2\frac{\partial}{\partial y}\left[W_n^{(\alpha,\beta)}(x;k)y^{kn-k+1}\right]$$
$$+ B_0\left[W_n^{(\alpha,\beta)}(x;k)y^{kn-k+1}\right] \qquad (3.1.1)$$

(3.1.1) में समीकरण (2.3) का प्रयोग करने पर—

$$= \frac{B_1\,y^{kn-k+1}k}{(x-1)}\left[n\,W_n^{(\alpha,\beta)}(x;k) - (\alpha+n)W_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x;k)\right.$$
$$\left. - \frac{(\alpha+n)}{(\alpha+\beta+n)}D_x\,W_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x;k)\right]$$
$$+ B_2 W_n^{(\alpha,\beta)}(kn-k+1)y^{kn-k} + B_0 W_n^{(\alpha,\beta)}(x;k)y^{kn-k+1}$$

$$= y^{kn-k+1}W_n^{(\alpha,\beta)}(x;k)\left[\frac{kn}{(x-1)}B_1 + \frac{B_2(kn-k+1)}{y} + B_o\right]$$
$$- y^{kn-k+1}\left[\frac{(\alpha+n)k}{(x-1)}B_1 W_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x;k) - \frac{(\alpha+n)k}{(\alpha+\beta+n)(x-1)}D_x W_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x;k)\right]$$

$W_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x;k)\,y^{kn-k+1}$ के गुणांक को x तथा y से स्वतन्त्र बनाने के उद्देश्य से हमने चुना कि

$$B_1 = -(x-1),\ B_2 = y,\ B_0 = (k-1)$$

$$\therefore \qquad B = -(x-1)\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + (k-1) \qquad (3.1.2)$$

तथा $B\left[W_n^{(\alpha,\beta)}(x;k)y^{kn-k+1}\right]$

$$=\left[(\alpha+n)\,W_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x;k)+\frac{(\alpha+n)k}{(\alpha+\beta+n)}D_x W_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x;k)\right]y^{kn-k+1} \qquad (3.1.3)$$

उपपत्ति (ii) : माना कि

$$C=C_1(x;y)\frac{\partial}{\partial x}+C_2(x;y)\frac{\partial}{\partial y}+C_0(x;y)$$

अतः $C\left[W_n^{(\alpha,\beta)}(x;k)y^{kn-k+1}\right]=C_1\frac{\partial}{\partial x}\left[W_n^{(\alpha,\beta)}(x;k)y^{kn-k+1}\right]$

$$+C_2\frac{\partial}{\partial y}\left[W_n^{(\alpha,\beta)}(x;k)y^{kn-k+1}\right]+C_0\left[W_n^{(\alpha,\beta)}(x;k)y^{kn-k+1}\right] \qquad (3.1.4)$$

अब (3.14) में समीकरण (2.4) का प्रयोग करने पर—

$$=C_1 y^{kn-k+1}\frac{(\alpha+\beta+n+1)}{(\alpha+n+1)}\left[(n+1)\,W_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x;k)\right.$$

$$\left.-(\alpha+n+1)\,W_n^{(\alpha,\beta)}(x;k)-\frac{(x-1)}{k}D_x W_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x;k)\right]$$

$$+C_2(kn-k+1)\,W_n^{(\alpha,\beta)}(x;k)y^{kn-k}+C_0 W_n^{(\alpha,\beta)}(x;k)y^{kn-k+1}$$

$$=y^{kn-k+1}W_n^{(\alpha,\beta)}(x;k)\left[-(\alpha+\beta+n+1)C_1+\frac{C_2(kn-k+1)}{y}+C_o\right]$$

$$+\frac{C_1 y^{kn-k+1}(\alpha+\beta+n+1)}{(\alpha+n+1)}$$

$$\times\left[(n+1)\,W_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x;k)-\frac{(x-1)}{k}D_x W_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x;k)\right]$$

$C_1 = \dfrac{1}{\alpha+\beta+n+1}$, $C_2 = y$, $C_0 = -(kn-k)$ **चुनने पर**

$$\therefore \quad C = \frac{1}{\alpha+\beta+n+1}\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - (kn-k) \tag{3.1.5}$$

तथा

$$C\left[W_n^{(\alpha,\beta)}(x;k)\,y^{kn-k+1}\right]$$
$$= \frac{y^{kn-k+1}}{(\alpha+n+1)}\left[(n+1)\,W_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x;k) - \frac{(x-1)}{k}D_x W_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x;k)\right] \tag{3.1.6}$$

रैखिक अवकल आपरेटर से तुष्टि होती है यदि

$$A = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$B = -(x-1)\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + (k-1)$$

$$C = \frac{1}{\alpha+\beta\, n}\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - (kn-k)$$

यही नहीं, हम क्रमविनिमयक संकेत का प्रयोग करें तो पाते हैं

प्रमेय 3.2

यदि $A = \dfrac{\partial}{\partial x}$ तथा $B = -(x-1)\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y} + (k-1)$ तो दिखाना है कि

$$[A, B]\,u = (AB - BA) = -Au$$

उपपत्ति : हमें ज्ञात है कि

$$(AB)\,u = \frac{\partial}{\partial x}\left[-(x-1)\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + (k-1)\right]u$$

$$= -\frac{\partial u}{\partial x} - (x-1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + (k-1)\frac{\partial u}{\partial x} \tag{3.2.1}$$

तथा

$$(BA)u = \left[-(x-1)\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + (k-1) \right] \frac{\partial}{\partial x} u$$

$$= -(x-1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial u}{\partial y \partial x} + (k-1)\frac{\partial u}{\partial x}$$

यदि $$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

तो $$[A, B]u = -\frac{\partial}{\partial x} u = -Au. \quad (3.2.2)$$

प्रमेय 3.3 यदि

$$B = -(x-1)\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + (k-1)$$

तथा $$C = p\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - (kn - k)$$

तो क्रम विनिमयक गुण का उपयोग करते हुए यह सिद्ध करते हैं कि

$$[B, C]u = [BC - CB]u = PAu$$

जहाँ $$P = \frac{1}{\alpha + \beta + n + 1}$$

उपपत्ति : माना कि

$$(BC)u = \left[-(x-1)\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + (k-1) \right] \left[P\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - k(n-1) \right] u$$

$$= -(x-1)P\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\{P - (x-1)\}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

$$+ \{P(k-1) - (x-1)k(n-1)\}\frac{\partial u}{\partial x} + y\{k - k(n-1)\}\frac{\partial u}{\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

तथा

$$(CB)u = \left[P\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - k(n-1)\right]\left[-(x-1)\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + (k-1)\right]u$$

$$= -P\frac{\partial u}{\partial x} - (x-1)P\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\{P-(x-1)\}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

$$+ \{P(k-1) - (x-1)k(n-1)\}\frac{\partial u}{\partial x} + y\{k - k(n-1)\}\frac{\partial u}{\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

इसलिए $$[B, C]u = P\frac{\partial u}{\partial x} = PAu = \frac{1}{\alpha+\beta+n+1}Au \qquad (3.3.1)$$

यदि हम $A = \frac{\partial}{\partial x}$ तथा $C = \frac{1}{\alpha+\beta+n+1}\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - (kn-k)$ लें तो

$$[A, C]u = [AC - CA]u = 0.$$

अतः $$[A, B] = -A$$

$$[B, C] = \frac{A}{\alpha+\beta+n+1}$$

$$[A, C] = 0.$$

ये क्रम विनिमयक सम्बन्ध यह दर्शाते हैं कि आपरेटर 1, A, B, C एक ली ग्रुप सृजित करते हैं और C करता है A तथा B आपरेटरों के साथ। हम B तथा C आपरेटरों में से प्रत्येक द्वारा सार्वीकृत किये गये ग्रुप के विस्तीर्ण रूप को व्यक्त करते हैं।

$$e^{cC}f(x, y) = (1-cy)^{-a-1}\exp\left\{\frac{-cxy}{1-cy}\right\}f\left(\frac{x}{1-cy}, \frac{y}{1-cy}\right) \qquad (3.4)$$

$$e^{bB}f(x, y) = f\left(\frac{xy}{y-b}, y-b\right) \qquad (3.5)$$

तो $$e^{cC}e^{bB}f(x, y) = (1-cy)^{-a-1}$$

$$\times \exp\left\{\frac{-cxy}{1-cy}\right\}f\left(\frac{xy}{(1-cy)(y-b+bcy)}, \frac{y-b+bcy}{1-cy}\right) \qquad (3.6)$$

4. जनक फलन

चूँकि $W_n^{(\alpha,\beta)}(x;k)y^{kn-k+1}$ हल है तन्त्र $Wu = 0$, का अतः हम सेठी, प्रजापत तथा पूनम[3] जैसी तीन दशाओं पर विचार करते हुए जनक फलों का निर्धारण करते हैं।

दशा 1. $b = 1, c = 0$

दशा 2. $b = 0, c = 1$

दशा 3. $bc \neq 0$.

दशा 1. चूँकि किसी यादृच्छिक फलन f (x, y) के लिए

$$e^{bB} f(x,y) = f\left(\frac{xy}{y-b}, y-b\right)$$

क्योंकि $b = 1$ अतः हमें प्राप्त होता है

$$e^{B}\left[y^{kn-k+1} W_n^{(\alpha,\beta)}(x;k)\right] = (y-1)^{kn-k+1} W_n^{(\alpha,\beta)}\left[\frac{xy}{y-1}; k\right] \quad (4.1)$$

माना कि

$$G(x,y) = (y-1)^{kn-k+1} W_n^{(\alpha,\beta)}\left[\frac{xy}{y-1}; k\right]$$

तो $G(x,y)$ को निम्नांकित से भी लिखा जा सकता है—

$$G(x,y) = y^{kn-k+1}(1-y^{-1})^{kn-k+1} W_n^{(\alpha,\beta)}\left[\frac{x}{1-y^{-1}}; k\right] \quad (4.2)$$

(4.2) नवीन प्रकार का जनक फलन है।

दशा *2 :* $b = 0, c = 1$ किसी यादृच्छिक + (x, y) के लिए हमें ज्ञात है–

$$e^{cC} f(x,y) = (1-cy)^{-a-1} \exp\left\{\frac{-cxy}{1-cy}\right\} f\left(\frac{x}{1-cy}, \frac{y}{1-cy}\right) \quad (4.3)$$

अतः $c = 1$, के लिए हम पाते हैं—

$$e^{C}\left[y^{kn-k+1}W_n^{(\alpha,\beta)}(x;k)\right]$$

$$=(1-y)^{-a-1}\exp\left\{\frac{-xy}{1-cy}\right\}W_n^{(\alpha,\beta)}\left[\frac{x}{y-1};k\right]\left(\frac{y}{1-y}\right)^{kn-k+1} \tag{4.4}$$

दशा 3 : $bc \neq 0$. परिणामों को सरल करने की दृष्टि से हम $c = 1$ तथा $b = -1/w$ लेते हैं और समीकरण (3.6) का प्रयोग करते हैं। तब W के समस्त सान्त मानों के लिए

$$e^{C}e^{-\frac{1}{w}B}\left[y^{kn-k+1}W_n^{(\alpha,\beta)}(x;k)\right]$$

$$=(1-y)^{-a-1}\exp\left\{\frac{-xy}{1-y}\right\}\left(\frac{1-y+wy}{w(1-y)}\right)^{kn-k+1}$$

$$\times W_n^{(\alpha,\beta)}\left[\frac{xwy}{(1-y)(1-y+wy)};k\right] \tag{4.5}$$

निर्देश

1. सिंहल तथा सविता कुमारी : Biorthogonal Polynomials associated with Jacobi Weight Function, Presented at the 76th Annual session of Indian Science Congress, Tirupati (1982).

2. सरिता पराड़कर, एम० फिल थीसिस, एम० एस० यूनिवर्सिटी, बड़ोदरा

3. सेठी, पी० एल०, प्रजापति, पी० के० तथा कु० पूनम (प्रकाशनार्थ प्रेषित)

4. वीज़नर, लुइस : Pacific J. Math. 1955, 5.

5. वही : Canada. J. Math. 1959, 11.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 44, No. 4, October 2001.

फूरियर श्रेणी की (f, d_n) संकलनीयता

वी. एन. त्रिपाठी तथा यू. एस. यादव
एस. बी. पी. जी. कालेज, बड़ागाँव, वाराणसी (उ. प्र.)

[प्राप्त — अगस्त 20, 2001]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में फूरियर श्रेणी की (f, d_n) संकलनीयता का अध्ययन किया गया है जो अत्यन्त सामान्य प्रतिबन्ध के अन्तर्गत वुकोविक तथा कैथल के प्रमेयों के परिणामों का सार्वीकरण करती है।

Abstract

On (f, d_n) summability of Fourier series. *By* V. N. Tripathi and U. S. Yadav, S.B.P.G.College, Baragaon, Varanasi (U. P.)

Vuckovic [7] established a theorem on K^{λ}-Summability of Fourier series. Kathal[3] generalized the theorem due to Vuckovic. Here in the present paper, we have studied (f, d_n) summability of Fourier series which generalizes the results of the theorems due to Vuckovic and Kathal under very general condition.

1. परिभाषा तथा संकेतन

माना कि $f(z)$ एक गैर-अचर सम्पूर्ण फलन है तथा माना कि $\{d_n\}$ संकुल संख्याओं का ऐसा अनुक्रम है कि

$$d_i \neq -f(0),\ d_i \neq -f(1) \quad (i \geq 1) \tag{1.1}$$

स्मिथ[6] ने (f, d_n) संकलनीयता विधि की परिभाषा निम्नवत् दी है–

अनन्त श्रेणी ΣAn, जिसके आंशिक योगफलों का अनुक्रम $\{t_n\}$ है योगफल t तक संकलनीय (f, d_n) कही जाती है यदि और केवल यदि

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{a,k} t_k = 1 \qquad (1.2)$$

जहाँ $a'^{s}_{n,k}$ मैट्रिक्स

$$A = [a_{n,k}], n, k = 0, 1, 2 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

के तत्व हैं जिन्हें समीकरणों के सेट द्वारा पारिभाषित किया जाता है

$$\left.\begin{aligned} & a_{0,0} = 1 \\ & a_{0,k} = 0 \ (k \neq 0) \\ \text{तथा} \quad & \prod_{i=1}^{n} \frac{f(z) + di}{f(1) + di} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} Z^k; \quad (n \geq 1) \end{aligned}\right\} \qquad (1.3)$$

चूँकि $f(z) = \lambda z$ एवं $d_n = n, \lambda > 0$ अतः (f, d_n) संकलनीयता विधि वुकोविक द्वारा परिभाषित k^λ-संकलनीयता विधि में समानीत हो जाती है।

फलन f के सम्बन्ध में की गई कल्पना के अतिरिक्त हम आगे भी कल्पना करते हैं।

$$\left.\begin{aligned} & f(1) = f'(1) = 1 \\ \text{जबकि} \quad & f''(1) \neq 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.4)$$

हम लिखते हैं

$$\left.\begin{aligned} & H_{n\cdot} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1 + dj} \\ & L_n = 2\sum_{j=1}^{n} \frac{dj}{(1 + dj)^2} \\ & u_n = 2H_n \\ & S_n = 4a_2 H_n + L_n \end{aligned}\right\} \qquad (1.5)$$

जहाँ a_2 अचर है तथा

$$a_2 = f''(1)/2 > 0 \text{ [शूप[5]]} \qquad (1.6)$$

स्मिथ ने[6] (f, d_n) संकलनीयता विधि के लिए नियमितता प्रतिबन्धों को स्थापित किया है।

(f, d_n) संकलनीयता विधि के लिए नियमितता प्रतिबन्धों का यह अर्थ हुआ कि

$$\left.\begin{aligned} &U_n \to \infty, \qquad S_n \to \infty \text{ ज्यों ज्यों } \quad n \to \infty \\ \text{तथा} \quad &\frac{u_n^2}{S_n} \to \infty \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

चूँकि लेबेस्ग अचर बद्ध नहीं है अतः फूरियर श्रेणी की (f, d_n) संकलनीयता के लिए पर्याप्त मानदण्ड का अध्ययन करना रोचक होगा। माना कि $F(t)$ का आवर्ती और अन्तराल $(-\pi, \pi)$ में का लेबेस्ग समाकलनीय फलन है। तब फलन $F(t)$ की फूरियर श्रेणी को निम्नांकित के द्वारा प्रदर्शित किया जायेगा

$$F(t) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nt + b_n \sin nt \right) \tag{1.8}$$

बिन्दु $t = x$ पर हम लिखेंगे कि

$$\phi(t) = \frac{1}{2} \{ F(x+t) + F(x-t) - 2F(x) \} \tag{1.9}$$

तथा

$$\Phi(t) = \int_0^t |\phi(u)| \, du \tag{1.10}$$

2. प्रस्तावना तथा मुख्य परिणाम

K^{λ}-विधियों को सर्वप्रथम करमाता ने[2] प्रचलित किया। लोटोस्की ने[4] विशिष्ट दशा $\lambda = 1$ को पुनः प्रचारित किया। किन्तु ऐग्न्यू[1] के शोधपत्र के बाद ही उन तथा उसी के समान अन्य विधियों का गहन अध्ययन किया जा सका। वुकोविक[7] ने करमाता विधियों के द्वारा फूरियर श्रेणी की संकलनीयता पर प्रमेय की स्थापना की है।

कैथल[3] ने वुकोविक के प्रमेय सार्वीकरण निम्नांकित सामान्य प्रतिबन्ध के अन्तर्गत निम्नांकित को सिद्ध करके किया है।

प्रमेय A : यदि

$$\Phi(t) = \int_0^t |\phi(u)| \, du = 0\left[\frac{t}{\log(1/t)}\right] \text{ज्यों ज्यों } t \to 0 \tag{2.1}$$

तब श्रेणी (1.8) बिन्दु $t = x$ पर योगफल $F(x)$ तक संकलनीय K^{λ} $(\lambda > 0)$ है

मुख्य परिणाम

स्मिथ ने[6] (f, d_n) संकलनीयता विधि की परिभाषा दी है जो $f(z) = \lambda z$ विशिष्ट दशा के लिए K^{λ} संकलनीयता विधि में समाहित हो जाती है तथा $d_n = n, \lambda > 0$

प्रस्तुत प्रपत्र में हमने वुकोविक तथा कैथल के प्रमेय के परिणामों का सार्वीकरण सामान्य (f, d_n) संकलनीयता विधि पर विचार करते हुए तथा निम्नांकित को स्थापित करते हुए की है–

प्रमेय : माना कि $\beta(t)\, t$ का धनात्मक वर्धमान फलन है। यदि

$$\Phi(t) = \int_0^t |\phi(u)|\, du = 0\left[\frac{t}{\beta(1/t)}\right] \tag{2.2}$$

ज्यों ज्यों $t \to 0$, तब श्रेणी (1.8) बिन्दु $t = x$ पर योगफल F (x) तक संकलनीय (f, d_n) होगी।

3. प्रमेयिकाएं

हमारे प्रमेय को सिद्ध करने के लिए निम्नांकित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी–
प्रमेयिका 1 [शूप[5]]

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{f(e^{2it}) + dj}{1 + dj} = e^{\left(2iH_n t - 4a_2 Hnt^2 - L_n t^2\right)} + O\left(H_n t^3\right)$$

$$= e^{\left(iu_n t - S_n t^2\right)} + O\left(u_n t^3\right)$$

प्रमेयिका 2

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{f(e^{it}) + dj}{1 + dj} \leq e^{\frac{-a_2 t^2 u_n}{8}}$$

शूप (1979 पृष्ठ 260) से यह स्पष्ट हो जाता है कि

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{Rj}{1 + dj} \leq e^{a_2 t^2 t \ln}$$

यदि

$$Rj = f\left(e^{2it}\right) + dj$$

अतः

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{f(e^{it}) + dj}{1 + dj} \leq e^{\frac{-a_2 t^2 u_n}{8}}$$

4. मुख्य प्रमेय की उपपत्ति

जिगमुण्ड[8] का अनुसरण करने पर, यदि Tk फूरियर श्रेणी (1.8) के बिन्दु $t = x$ पर kवें आंशिक योगफल को सूचित करे तो

$$T_k(x) - F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\phi(t)}{t} \sin\left(K + \frac{1}{2}\right) t \, dt + 0(1) \qquad (4.1)$$

इसलिए Tk का (f, d_n) रूपान्तर σ_n (1.2) का अनुसरण करने पर निम्नवत् प्रदर्शित किया जावेगा

$$\sigma_n(x) - F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} \left\{ T_k(x) - F(x) \right\}$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\phi(t)}{t} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) t \right\} dt + 0(1)$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\phi(t)}{t} I_m \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k} \, e^{i\left(k + \frac{1}{2}\right) t} \right\} dt + 0(1)$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\phi(t)}{t} I_m \left\{ e^{\frac{it}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} \, e^{ikt} \right\} dt + 0(1)$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\phi(t)}{t} I_m \left\{ e^{\frac{it}{2}} \prod_{j=1}^{n} \frac{f(e^{it}) + dj}{1 + dj} \right\} dt + 0(1)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{2\pi/u_n} + \int_{2\pi/u_n}^{u_n^{-\alpha}} + \int_{u_n^{-\alpha}}^{\pi} \right] \frac{\phi(t)}{t} I_m \left\{ e^{\frac{it}{2}} \prod_{j=1}^{n} \frac{f(e^{it}) + dj}{1 + dj} \right\} dt + 0(1)$$

जहाँ $1/3 < \alpha < 1/2$

$$= I_1 + I_2 + I_3 0(1) \text{ माना} \tag{4.2}$$

सर्वप्रथम I_1 पर विचार किया जावेगा। प्रमेयिका 1 का उपयोग करने पर

$$\left| I_1 \right| = O(1) \int_0^{2\pi/u_n} \frac{\phi(t)}{t} \left\{ e \frac{-Snt^2}{4} \left| \sin\left(u_n + 1\right)\frac{t}{2} \right| + O\left(u_n t^3\right) \right\} dt$$

$$= I_{1.1} + I_{1.2}; \text{ माना} \tag{4.3}$$

अब

$$\left| I_{1.2} \right| = O(1) \int_0^{2\pi/u_n} \frac{|\phi(t)|}{t} \left(u_n t^3\right) dt$$

$$= O\left(u_n\right) \int_0^{2\pi/u_n} |\phi(t)| t^2 dt$$

$$= O\left(\frac{1}{u_n}\right) \int_0^{2\pi/u_n} |\phi(t)| dt$$

$$= O\left(\frac{1}{u_n}\right) . 0 \left[\frac{\frac{1}{u_n}}{\beta\left(u_n\right)} \right] \qquad \text{(2.2) का प्रयोग करने से}$$

$$= 0 \left[\frac{1}{u_n^2 \beta\left(u_n\right)} \right]$$

$$= (1), \text{ ज्यों ज्यों } n \to \infty \tag{4.4}$$

अपरंच

$$\left| I_{1,1} \right| = O(1) \int_0^{2\pi/u_n} \frac{|\phi(t)|}{t} \left(u_n + 1\right) \frac{t}{2} dt$$

$$= O\left(u_n\right) \int_0^{2\pi/u_n} |\phi(t)|\, dt$$

$$= O\left(u_n\right) . 0\left[\frac{\frac{1}{u_n}}{\beta\left(u_n\right)}\right] \qquad \text{(2.2)के प्रयोग से}$$

$$= O\left[\frac{\frac{1}{u_n}}{\beta\left(u_n\right)}\right]$$

$$= O(1) \text{ ज्यों ज्यों } n \to \infty \tag{4.5}$$

(4.3), (4.4) एवं (4.5) से यह अनुगमन होता है कि

$$I_1 = 0(1), \text{ ज्यों ज्यों } n \to \infty \tag{4.6}$$

इसके बाद I_2 पर विचार करने पर

$$I_2 = \frac{2}{\pi} \int_{2\pi/u_n}^{u_n^{-\alpha}} \frac{\phi(t)}{t} \left\{ e^{\frac{-Snt^2}{4}} \sin\left(u_n + 1\right)\frac{t}{2} + O\left(u_n t^3\right)\right\} dt$$

$$= I_{2.1} + I_{2.2}, \text{ माना} \tag{4.7}$$

अब

$$\left| I_{2,1} \right| = O(1) \int_{2\pi/u_n}^{u_n^{-\alpha}} \frac{|\phi(t)|}{t} \left\{ e^{\frac{-Snt^2}{4}} \sin\left(u_n + 1\right)\frac{t}{2} \right\} dt$$

$$= O\left(e^{\frac{-\pi^2 Sn}{u_n^2}}\right) \int_{2\pi/u_n}^{u_n^{-\alpha}} \frac{|\phi(t)|}{t} \left| \sin\left(u_n + 1\right)\frac{t}{2} \right| dt$$

$$= O(1) \int_{2\pi/u_n}^{u_n^{-\alpha}} \frac{|\phi(t)|}{t}\, dt$$

$$= O(1)\left[0\left(\frac{1}{\beta\left(\frac{1}{t}\right)}\right)\right]_{2\pi/u_n}^{u_n^{-\alpha}} + O(1)\int_{2\pi/u_n}^{u_n^{-\alpha}} 0\left(\frac{1}{t\,\beta\left(\frac{1}{t}\right)}\right)dt$$

$$= 0\left(\frac{1}{\beta\left(u_n^{\alpha}\right)}\right) - 0\left(\frac{1}{\beta\left(u_n\right)}\right) + 0\left(\frac{u_n^{\alpha}}{\beta\left(u_n^{\alpha}\right)}\right)\int_{2\pi/u_n}^{u_n^{-\alpha}} dt$$

$$= 0\left(\frac{1}{\beta\left(u_n^{\alpha}\right)}\right) - 0\left(\frac{1}{\beta\left(u_n\right)}\right) + 0\left(\frac{1}{\beta\left(u_n^{\alpha}\right)}\right)$$

$$= 0(1), \text{ ज्यों ज्यों } n \to \infty \tag{4.8}$$

अपरंच

$$\left|I_{2,2}\right| = O(1)\int_{2\pi/u_n}^{u_n^{-\alpha}} \frac{|\phi(t)|}{t}\left(u_n t^3\right)dt$$

$$= O\left(u_n\right)\int_{2\pi/u_n}^{u_n^{-\alpha}} |\phi(t)|\, t^2\, dt$$

$$= O\left(u_n^{1-2\alpha}\right)\int_{2\pi/u_n}^{u_n^{-\alpha}} |\phi(t)|\, dt$$

$$= O\left(u_n^{1-2\alpha}\right)\int_{0}^{u_n^{-\alpha}} |\phi(t)|\, dt$$

$$= O\left(u_n^{1-2\alpha}\right).\, 0\left[\frac{u_n^{-\alpha}}{\beta\left(u_n^{\alpha}\right)}\right]$$

$$= 0\left[\frac{u_n^{1-3\alpha}}{\beta\left(u_n^{\alpha}\right)}\right]$$

$$= 0(1); \text{ ज्यों ज्यों } n \to \infty \tag{4.9}$$

(4.7), (4.8) एवं (4.9) से यह अनुगमन होता है कि

$$= 0(1); \text{ ज्यों ज्यों } n \to \infty \qquad (4.10)$$

अन्त में हम I_3 पर विचार करते हैं। अब प्रमेयिका 2 का उपयोग करने पर

$$\left| I_3 \right| = O(1) \int_{u_n^{-\alpha}}^{\pi} \frac{|\phi(t)|}{t} . O\left(e^{\frac{-a_2 u_n t^2}{8}} \right) dt$$

$$= O\left(u_n^{\alpha} \right) . O\left(e^{\frac{-a_2 u_n}{8 u_n^{2\alpha}}} \right) \int_{u_n^{-\alpha}}^{\pi} |\phi(t)| \, dt$$

$$= O\left(u_n^{\alpha} . e^{\frac{-a_2 u_n t^2}{8}} \right)$$

$$= 0(1); \text{ ज्यों ज्यों } n \to \infty \qquad (4.11)$$

(4.2), (4.6), (4.10) एवं (4.11), को एकसाथ मिलाने पर वांछित परिणाम प्राप्त होता है। इस तरह हमारे प्रमेय की उपपत्ति पूरी होती है।

निर्देश

1. ऐग्न्यू, आर. पी. : Michigan Math. J. 1957, 4, 105-128.
2. करमाता जे. : Mathematica (cluj) 1935, 9, 164-178.
3. कैथल, पी. डी. : Riv. Mat. Univ. Parma. Ital. 1969, 10(2), 33-38.
4. लोटोट्स्की, ए. वी. : Ivanov. Gos. Ped. Institute Uchen Zap. Fig. Math. Nauki, 1953, 4, 61-91.
5. शूप, आर. ए. : Pacific J. Math., 1979, 80, 255-263.
6. स्मिथ, जी. : Canad. J. Math., 1965, 17, 506-526.
7. वुकोविक, वी. : Math. Zeit., 1965, 89, 192-195.
8. जिगमुण्ड, ए. : Trigonometrical Series. भाग 1, द्वितीय संस्करण, कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 44, No. 4, October 2001.

कुछ मिश्रित धातु टरथैलेट यौगिकों का संश्लेषण एवं भौतिक-रासायनिक अभिलक्षणन अध्ययन

ए. पी. मिश्रा, वी. के. तिवारी तथा आर. सिंघई
अकार्बनिक रसायन शोध प्रयोगशाला, रसायन शास्त्र विभाग
डॉ० हरीसिंह गौर विश्वविद्यालय, सागर (म. प्र.)

सारांश

टरथैलिक अम्ल के डाइसोडियम लवण द्वारा धातु टरथैलेट बनाकर एवं डाईमेथल ग्लाइआक्सिम (डी एम जी) के साथ संघनन द्वारा Ni (II) व Cu (II) टरथैलेट संकुलों का निर्माण किया। विभिन्न भौतिक तथा रासायनिक विधियों जैसे : तत्त्व विश्लेषण, आण्विक चालकता, अवरक्त स्पेक्ट्रम, पराबैंगनी दृश्य स्पेक्ट्रम तथा चुम्बकीय मापनों द्वारा इन संकुलों का अध्ययन किया गया। सभी अध्ययनों के द्वारा संकुलों की वर्ग समतलीय ज्यामिति सुझायी गयी। संकुलों का सामान्य सूत्र $[NiL_2]$ T. H_2O तथा $[CuL_2]$ T है।

Abstract

Synthesis and physico-chemical characterization of some mixed-ligand terephthalate complexes. *By* A. P. Mishra, V. K. Tiwari and R. Singhai, Inorganic Laboratories, Department of Chemistry, Dr. H. S. Gaur University, Sagar (M.P.).

Complexs of Ni(II) and Cu(II) terephthalate with DMG (Dimethyl glyoxime) have been synthesized and characterized by elemental analysis, molar conductance, infrared spectra U. V. studies and magentic measurements. On the basis of above studies a square planar geometry is suggested for the complexes. The general formulae of the complexes are $[NiL_2]$ T.H.$_2$ O and $[CuL_2]$ T.

टरथैलेट अपनी बहुलीकृत प्रकृति, तापरोधी गुण व औद्योगिक महत्त्व बनाये हुये हैं। धातु टरथैलेट तथा उनके बनाने के संबंध में अध्ययन किया जा चुका है।[1,2] मिश्रित लिगैण्ड संकुलों

का विभिन्न प्रकार से अध्ययन हो चुका है तथा इनका सैद्धांतिक रासायनिक उपयोग भी है।[3-5] धातु टरथैलेट के मिश्रित लिगैण्ड संकुलों का भी अध्ययन किया गया है।[6-7] प्रस्तुत शोध का उद्देश्य Ni (II) डीएमजी तथा Cu (II) टरथैलेट डीएमजी संकुलों का संश्लेषण तथा उनका अभिलक्षण ज्ञात करना है।

प्रयोगात्मक

निकल तथा कापर के धातु टरथैलेट तथा लिगैण्ड की अभिक्रिया द्वारा धातु संकुल बनाये गये हैं। धातु टरथैलेट संकुल के निर्माण के लिए निकल सल्फेट, कापर सल्फेट, टरथैलिक एसिड तथा सोडियम बाइकार्बोनेट का प्रयोग किया गया एवं डाइमेथिल ग्लाइआक्सिम का लिगैण्ड के रूप में प्रयोग किया गया। संकुलों के संश्लेषण के लिए उपयोग में लाये गये अभिकर्मक वैश्लेषिक कोटि के थे।

धातु टरथैलेट का संश्लेषण पूर्व साहित्य में वर्णित है।[6-7] धातु यौगिकों का निर्माण निकल टरथैलेट/कापर टरथैलेट (0.01 mole) के जलीय मेथेनालिक विलयन के साथ डाइ मेथिल ग्लाइआक्सिम के मेथेनालिक विलयन को 1:2 अनुपात में मिलाया गया। इस दौरान अभिक्रिया विलयन का पी. एच. 5-6 के बीच पाया गया। अभिक्रिया विलयन को एक जल उष्मक पर लगभग 8 घंटे पश्चवाहक यंत्र में गर्म करते हैं। अभिक्रिया विलयन के ठण्डा होने पर संकर यौगिक प्राप्त हुआ जिसे छानकर मेथेनाल से, फिर ईथर से 2-3 बार साफ किया गया। संकर यौगिक को डेसीकेटर में निर्जल कैल्सियम पर तथा विद्युत ओवन में 70° C पर सुखाया गया।

परिणाम तथा विवेचना

कार्बन, हाइड्रोजन व नाइट्रोजन तत्त्वों के विश्लेषण के लिए सी. डी. आर. आई. लखनऊ भेजा गया जिसके आधार पर आण्विक सूत्र का निर्धारण किया गया। संकर यौगिकों के वैश्लेषिक आंकड़े सूचित करते हैं कि धातु टरथैलेट व लिगैण्ड (डी एम जी) का अनुपात 1:2:2 में है। संकर यौगिक सामान्य रासायनिक विलायकों में अघुलनशील या बहुत ही आंशिक घुलनशील थे अतः आण्विक चालकता नहीं निकाली जा सकी।[6, 7, 11]

अवरक्त अवशोषण स्पेक्ट्रम

संकुलों के अवरक्त अवशोषण स्पेक्ट्रम सी. डी. आर. आई. लखनऊ द्वारा पर्किन एलमार स्पेक्ट्रोफोटोमीटर पर अभिलेखित किये गये। लिगैण्ड (DMG) के अवरक्त अवशोषण स्पेक्ट्रम साहित्य[8-10, 12-13] द्वारा किये गये जिससे धातु संकुलों द्वारा तुलनात्मक विवेचन किया जा सके। इन संकुलों के लिये प्रस्तावित सूत्र तथा प्राप्त वैश्लेषिक आंकड़ों के मध्य अच्छा संबंध पाया गया।

लिगैण्ड में एक मजबूत बैण्ड 1620 cm^{-1} पर है जो संकुलों में रेड शिफ्ट के साथ 1550 ± 10 cm^{-1} पर पहुँचता है। यह दर्शाता है कि DMG के —C=N ग्रुप के नाइट्रोजन द्वारा किलेटीकरण[8-10] हुआ है। आक्सिम ग्रुप की N-O व O-H आवृत्तियों में मापनीय परिवर्तन नहीं हुआ।

टरथैलेट ऋणायन के अभिलाक्षणिक कार्बोक्सिलिक अवशोषण बैण्ड 1680 cm^{-1} व 1380cm^{-1} है, जो किलेटीकरण के बाद मापनीय परिवर्तित नहीं हुये। यह दर्शाता है कि टरथैलेट ग्रुप ने किलेटीकरण में भाग नहीं लिया[10, 12-14]। वर्तमान प्रयोगों व प्रेक्षणों के आधार पर यह लगता है कि आक्सिम ग्रुप के दोनों नाइट्रोजन किलेटीकरण में भागीदार हैं और DMG एक उदासीन लिगैण्ड की तरह कार्य करता है। धातु संकुल यौगिकों में दुर्बल तीव्रता के कुछ नये बंध जो vM-N को दर्शाते हैं[6-10, 12-13]। Ni (II) संकुल में 400cm^{-1} पर व Cu(II) संकुल में 420cm^{-1} पर है।

पराबैंगनी स्पेक्ट्रम अध्ययन

Ni (II) संकुल के इलेक्ट्रानिक स्पेक्ट्रम में दो बैण्ड प्राप्त होते हैं– 12987 cm^{-1} तथा 20408 cm^{-1}। ये ‘$A_{1g} \rightarrow$ ‘E_g (V_1) व ‘$A_{1g} \rightarrow$ ‘B_{1g} (V_3) के संक्रमण को दर्शाते हैं। संक्रमण ‘$A_{1g} \rightarrow$‘B_{2g} (V2) के द्वारा आने वाला बैण्ड स्पेक्ट्रम में नहीं आता है। उक्त तथ्य Ni (II) संकुल की वर्ग समतलीय ज्यामिति को प्रमाणित करते हैं।[8-10, 15, 16] चुम्बकीय माप द्वारा Ni (II) संकुल की प्रतिचुम्बकीय प्रकृति प्राप्त होती है।

सारणी 1

यौगिकों के वैश्लेषिक तथा चुम्बकीय आँकड़े

आण्विक सूत्र	$[NiL_2]$ T. H_2O L = DMG ($C_4 H_8 N_2 O_3$) T = $C_8 H_4 O_4$				$[Cu L_2]$. T L = ($C_4 H_8 N_2 O_3$) T = $C_8 H_4 O_4$			
अणुभार	472				459			
रंग	लाल				हरा			
गलनांक बिन्दु	300				320			
तत्त्व विश्लेषण प्राप्त %	C	H	N	M	C	H	N	M
	39.8	4.12	12.53	12.03	40.82	4.23	12.37	13.08
	(40.61)	(4.65)	(11.84)	(12.37)	(41.76)	(4.35)	(12.18)	(13.18)
u eff (B.M.)	—				1.82			
इलेक्ट्रानिक स्पेक्ट्रम आँकड़े	v_1 (cm^{-1}) : 12987				v_1 (cm^{-1}) : 13698			
	v_2 (cm^{-1}) : 20408				v_2 (cm^{-1}) : 16666			
संक्रमण	$^1A_{1g} \rightarrow {}^1E_g$				$^2B_{1g} \rightarrow {}^2B_{2g}$			
	$^1A_{1g} \rightarrow {}^1B_{2g}$				$^1B_{1g} \rightarrow {}^2E_g$			
	$^1A_{1g} \rightarrow {}^1B_{1g}$							

सारणी 2

धातु यौगिकों के अवरक्त अवशोषण बैण्ड

यौगिक	Ni (II) संकर यौगिक (cm^{-1})	**Cu(II)** संकर यौगिक (cm^{-1})
एरोमैटिक रिंग कम्पन	1560 (m), 1470 (s) 800 (s)	1570 (m), 1470 (m) 810 (s)
-OH (str) (bend)	~ 3100 (br) (OH bonded) 730 (s)	~ 3050 (OH bonded) 730 (s)
-C = N-	1550 (m)	1560 (m)
N-O	1230, 1090 (s)	1230, 1100 (s)
COO-- (carboxylate)	1670 1380 (m)	1680 (m, br) 1370 (ms)
$-H_2O$	~ 3150 (br)	—
M-N	400 (mbr)	420 m

Cu (II) संकुल दो बैण्ड 13698 Cm^{-1} व 16666Cm^{-1} पर दर्शाता है जो $2B_{1g} \rightarrow 2E_g$ संक्रमण के अनुरूप है। चुम्बकीय आघूर्ण मापने पर 1.82 B.M. है। स्पेक्ट्रमी व चुम्बकीय अध्ययनों के द्वारा संकुल की वर्ग समतलीय ज्यामिति सिद्ध होती है।[8-10, 15, 16]

निर्देश

1. फैजी. एस. जी. : (ईस्ट लैब. ई. आई. ड्रपोन्ट डे नेमार्स एण्ड कं.) : इन्ड. इन्जी. केम. प्रोड़. रिसर्च डेवलप., 1970, 9, 408, केम. एब्सट. 1970, 73, 87605e.
2. ओकामूरा, हयासी, एस., शिहोडा, के. तथा टेटशिया (रिसर्च इन्सटीट्यूट फॉर प्रोडक्शन डेवलपमेट) जापान, 6914, 575 (सी. आई. 25 ए. आई.) केम. एब्सट. 1970, 72, 13376.
3. मिश्रा ए. पी. : पीएच. डी. शोध प्रबंध, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, 1984.
4. वर्गर, ए. : मेडिसिनल केमिस्ट्री, इन्टरसाइन्स न्यूयार्क, 1970.
5. डे., ए. के. : जर्नल इण्डियन के मि, सोसा., 1986, 357.
6. शर्मा, सी. एल., डे., टी. के. तथा सिंह ए. के. : इण्ड. जर्नल केमि०, 1979, (18 A), 183.
7. मिश्रा, ए. पी., तिवारी, वी.के., सिंघई, आर., तथा गौतम एस. : विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका 1998, 41, 2.

8. मिखेलसन, पी. बी. तथा एब्टस्हेनको, एन. पी., रस. जर्नल इनआर्ग. कैम. 1970, 15 (6).

9. विजयराघवन, वी. आर. थिलाईचिदमबरम, एन., राधवन ए. तथा सनतापा, एम. : जर्नल इण्डि. केमि. सोसा., 1978 LV (6) 532.

10. संकला, डी. एस., माथुर, आर. एस. तथा मिश्रा, एस. एन. : करेन्ट साइन्स, 1979 49 (II) 481.

11. श्यामल, ए., तथा बरी नियाजी, एम. ए., : सिंथे, रिएक्ट. इनआर्ग., मैट— आर्ग. कैम. 1985, 15 (6), 805.

12. नाकामेटो, के., : इन्फ्रारेट इस्पेक्ट्रा आफ इन आर्गेनिक एण्ड कोआर्डिनेशन कम्पाउन्डस, चतुर्थ संस्करण, विले इण्टर साइन्स न्यूयार्क 1986.

13. सिलूवर-स्टीन, आर. एन., बैसलर, जी. सी. तथा मारिलठी : स्पैक्ट्रोमीट्रिक आइडेन्टीफिकेशन आफ आर्गेनिक कम्पाउन्ड्स, चतुर्थ संस्करण, विले एण्ड सन्स यू. एस. ए. 1981, 95.

14. श्यामल, ए. : इण्डि. जर्नल केमि. 1991, 30 ए. 390.

15. दत्ता, आर. एल. तथा श्यामल, ए. : एलीमेन्टस आफ मैग्नेटोकेमिस्ट्री, द्वितीय संस्करण, ईस्ट वेस्ट न्यू दिल्ली, 1993, 82, 123, 150. 157.

16. फिगिस, वी. एन. : कम्प्रिहेन्सिव इनार्गेनिक केमिस्ट्री, संस्करण जी विलकेन्सन पर्गेमेन प्रेस (यू. के.) 1987, 2.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 44, No. 4, October 2001.

दो चरों वाले H-फलन के कतिपय समाकल

ऋतु श्रीवास्तव
गणित विभाग, शासकीय मॉडल साइंस कॉलेज, रीवां (म. प्र.)

[प्राप्त — जुलाई 15, 2001]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में दो चरों वाले H-फलन वाले कतिपय सान्त द्विगुण समाकलों का मान ज्ञात किया गया है।

Abstract

On some integrals involving H-function of two variables. *By* Smt. Ritu Shrivastava, Department of Mathematics, Govt. Model Science College, Rewa (M. P.).

In this paper an attempt has been made to evaluate some finite double integrals involving H-function of two variables.

1. प्रस्तावना

दो चरों के H-फलन को[4] का हम निम्नांकित रूप में परिभाषित करेंगे—

$$H[x, y] = H^{0, n_1 : m_2, n_2 : m_3, n_3}_{p_1, q_1 : p_2, q_2 : p_3, q_3}$$

$$\times \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \left(a_j, \alpha_j, A_j\right)_{1, p_1} : \left(c_j, \gamma_j\right)_{1, p_2} : \left(e_j, E_j\right)_{1, p_3} \\ \left(b_j, \beta_j, B_j\right)_{1, q_1} : \left(d_j, \delta_j\right)_{1, q_2} : \left(f_j, F_j\right)_{1, q_3} \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{(-1)}{4\pi^2} \int_{L_1} \int_{L_2} \phi_1(\xi, \eta)\, \theta_2(\xi)\, \theta_3(\eta)\, d\xi\, d\eta \qquad (1.1)$$

जहाँ

$$\phi_1(\xi, \eta) = \frac{\prod_{J=1}^{n_1} \Gamma\left(1 - a_J + \alpha_J \xi + A_J \eta\right)}{\prod_{J=n_1+1}^{p_1} \Gamma\left(a_J - \alpha_J \xi - A_J \eta\right) \prod_{J=1}^{q_1} \Gamma\left(1 - b_J + \beta_J \xi + B_J \eta\right)}$$

$$\theta_2(\xi) = \frac{\prod_{J=1}^{m_2} \Gamma\left(d_J - \delta_J \xi\right) \prod_{J=1}^{n_2} \Gamma\left(1 - c_J + \gamma_J \xi\right)}{\prod_{J=m_2+1}^{q_2} \Gamma\left(1 - d_J + \delta_J \xi\right) \prod_{J=n_2+1}^{p_2} \Gamma\left(c_J - \gamma_J \xi\right)}$$

$$\theta_3(\eta) = \frac{\prod_{J=1}^{m_3} \Gamma\left(f_J - F_J \eta\right) \prod_{J=1}^{n_3} \Gamma\left(1 - e_J + E_J \eta\right)}{\prod_{J=m_3+1}^{q_3} \Gamma\left(1 - f_J + F_J \eta\right) \prod_{J=n_3+1}^{p_3} \Gamma\left(e_J - E_J \eta\right)}$$

x तथा y शून्य के तुल्य नहीं हैं तथा रिक्त गुणनफल को इकाई माना जाता है, P_i, q_i, n_i तथा m_j ऐसी ऋण संख्याएं हैं कि $p_i \geq n_i \geq 0$, $q_i \geq 0$, $q_i \geq m_j \geq 0$ $(i = 1, 2, 3, \ldots; j = 2, 3, \ldots)$ । कंटूर L ξ-तल में ξ है और अपने लूपों सहित $-\infty$ से $+\infty$ एक प्रसरित होता है जिससे आश्वस्त हुआ जा सके कि $\Gamma(d_j - \delta_j \xi)$ $(j = 1, \ldots, m_2)$ के पोल कंटूर के दाईं ओर तथा $\Gamma(1 - c_j + \gamma_j \xi)$ $(j = 1, \ldots, n_2)$, $\Gamma(1 - a_j + \alpha_j \xi + A_j \eta)$ $(j = 1, \ldots, m)$ के पोल बाईं ओर पड़ें।

कंटूर L_2 n-तल में है और अपने लूपों सहित $-\infty$ से $+\infty$ तक फैला है जिससे आश्वस्त हुआ जा सके कि $\Gamma(f_j - F_j \eta)$ $(j = 1, \ldots, m_3)$ के पोल दाईं ओर तथा $\Gamma(1 - e_j + E_j \eta)$ $(j = 1, \ldots, m_3)$ तथा $(1 - a_j + \alpha_j \xi + A_j \eta)$ $(j = 1, \ldots, n_1)$ के पोल कंटूर के बाईं ओर पड़ें।

अपरंच

$$R = \sum_{J=1}^{p_1} \alpha_J + \sum_{J=1}^{p_2} \gamma_J - \sum_{J=1}^{q_1} \beta_J - \sum_{J=1}^{q_2} \delta_J < 0$$

$$S = \sum_{J=1}^{p_1} A_J + \sum_{J=1}^{p_3} E_J - \sum_{J=1}^{q_1} B_J - \sum_{J=1}^{q_3} F_J < 0$$

$$U = -\sum_{J=n_1+1}^{p_1} \alpha_J - \sum_{J=1}^{q_1} \beta_J + \sum_{J=1}^{m_2} \delta_J - \sum_{J=m_2+1}^{q_2} \delta_J + \sum_{J=1}^{n_2} \gamma_J - \sum_{J=n_2+1}^{p_2} \gamma_J > 0$$

$$V = -\sum_{J=n_1+1}^{p_1} A_J - \sum_{J=1}^{q_1} B_J + \sum_{J=1}^{m_3} F_J - \sum_{J=m_3+1}^{q_3} F_J + \sum_{J=1}^{m_3} E_J - \sum_{J=m_3+1}^{p_3} E_J > 0$$

तथा

$$|\arg x| < \frac{1}{2} U\pi, \ |\arg y| < \frac{1}{2}\pi V.$$

इस अनुसन्धान में निम्नांकित परिणामों की आवश्यकता पड़ेगी।

एर्डेल्यी **[1, p. 171(23)] :**

$$\int_0^1 \rho_\upsilon(x) x^\sigma \, dx = \frac{\pi^{1/2} 2^{-\sigma-1} \Gamma(1+\sigma)}{\Gamma(1+\sigma/2-\partial/2)\Gamma(\sigma/2+\partial/2+3/2)} \tag{1.2}$$

$\mathrm{Re}(\sigma) > -1.$

व्यास तथा राठी **[5, p. 33] :**

$$\int_0^1 x^{c-1}(1-x)^{-1/2} \, {}_2F_1(a, b; a+b+1/2; x)\, dx$$

$$= \frac{\pi\,\Gamma(c)\,\Gamma(a+b+1/2)\,\Gamma(c-a-b+1/2)}{\Gamma(a+1/2)\,\Gamma(b+1/2)\,\Gamma(c-a+1/2)\,\Gamma(c-b+1/2)} \tag{1.3}$$

$\mathrm{Re}(c) > 0, \ \mathrm{Re}(2c-a-b) > -1.$

रेनविले [3, p. 18] :

$$\int_0^1 x^{\rho-1}(1-x)^{\sigma-1}\, dx = \frac{\Gamma(\rho)\,\Gamma(\sigma)}{\Gamma(\rho+\sigma)} \tag{1.4}$$

$\mathrm{Re}(\rho) > 0, \ \mathrm{Re}(\sigma) > 0$

मैकराबर्ट [2, p. 450-452] :

$$\int_0^{\pi/2} e^{i(\alpha+\beta)\theta} (\sin\theta)^{\alpha-1} (\cos\theta)^{\beta-1} \, d\theta = e^{\pi i\alpha/2} \frac{\Gamma\alpha \, \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

$$= e^{\pi i\alpha/2} \frac{\Gamma\alpha \, \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \qquad (1.5)$$

$\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, $\mathrm{Re}(\beta) > 0$

2. समाकल

हम यहाँ पर जिन समाकलों को स्थापित करेंगे वे हैं—

$$\int_0^1 \int_0^1 \rho_\partial(x) x^\sigma y^{c-1} (1-y)^{-1/2}$$

$$\times \, {}_2F_1(a, b; a+b+1/2; y) \, H\left[x^\lambda y^\mu z_1, \, x^\alpha y^\beta z_2\right] dx \, dy$$

$$= \frac{\pi^{3/2} 2^{-\sigma-1} \, \Gamma(a+b+1/2)}{\Gamma(a+1/2) \, \Gamma(b+1/2)} H^{0, n_1+3 \, : \, m_2, n_2 \, : \, m_3, n_3}_{p_1+3, q_1+4 \, : \, p_2, q_2 \, : \, p_3, q_3}$$

$$\times \left[\begin{array}{c|l} z_1 2^{-\lambda} & (-\sigma_i, \lambda, \alpha), \, (1-c; \mu, \beta) \, (1/2+a+b-c; \mu, \beta), \\ z_2 2^{-\alpha} & (b_j, 1_j^3, B_j)_{1,q}, (\partial/2-\sigma/2; \lambda/2, \alpha/2), (-1/2-\sigma/2-\partial/2; \lambda/2, \alpha/2, \end{array}\right.$$

$$\times \left.\begin{array}{l} (a_j, \alpha_j; A_j)_{1,p_1} : (c_j, \gamma_j)_{1,p_2} : (e_j, E_j)_{1,p_3} \\ (1/2+a_i-c; \mu_1 \beta), (1/2+b-c; \mu_1 \beta) : (d_j, \delta_j)_{1,q_2} : (f_j, F_j)_{1,q_3} \end{array}\right] \qquad (2.1)$$

$\mathrm{Re}(\sigma) > -1$, $\mathrm{Re}(c) > 0$, $\mathrm{Re}(2c-a-b) > -1$, $\lambda \geq 0$,

$\mu \geq 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $|\arg z_1| < 1/2 \, U\pi$, $|\arg z_2| < 1/2 \, \pi V$.

$$\int_0^1 \int_0^1 x^{\rho-1}(1-x)^{\sigma-1} y^{c-1}(1-y)^{-1/2}$$

$$\times\ {}_2F_1(a,\, b\,;\, a+b+1/2\,;\, y)\ H\Big[x^{\lambda}(1-x)^{\alpha} y^{z} z_1,\ x^{\mu}(1-x)^{\beta} y^{\partial} z_2\Big]\, dx\, dy$$

$$= \frac{\pi\,\Gamma(a+b+1/2)}{\Gamma(a+1/2)\ \Gamma(b+1/2)} H^{0,\, n_1+4\ :\ m_2, n_2\ :\ m_3, n_3}_{p_1+4,\, q_1+3\ :\ p_2, q_2\ :\ p_3, q_3}$$

$$\times \left[\begin{array}{c|l} z_1 & (1-f_i\,\lambda,\,\mu),\ (1-\sigma_i\,\alpha_i\,\beta),\ (1-c_i z,\,\partial)\ (1/2-c+a+b,\,z,\,\partial), \\ z_2 & (1-\rho-\sigma,\,\lambda+\alpha,\,\mu+\beta),\ (1/2-c+q\,;\,z,\,\partial)\ (1/2-c+b\,;\,z,\,\partial), \end{array}\right.$$

$$\left.\times \begin{array}{l} (a_j,\ \alpha_j,\ A_j)_{1,p_1}\ :\ (c_j,\ \gamma_j)_{1,p_2}\ :\ (e_j,\ E_j)_{1,p_3} \\ (b_j,\ \beta_j,\ B_j)_{1,\,q_1}\ :\ (d_j,\ \delta_j)_{1,\,q_2}\ :\ (f_j,\ F_j)_{1,\,q_3} \end{array}\right] \tag{2.2}$$

$\mathrm{Re}\,(f) > 0,\ \mathrm{Re}\,(\sigma) > 0,\ \mathrm{Re}\,(c) > 0,\ \mathrm{Re}\,(2c-a-b) > -1,\ A \geq 0,\ \alpha \geq 0,$

$z \geq 0,\ \mu \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \partial \geq 0,\ \left|\arg z_1\right| < \frac{1}{2} U\pi,\ \left|\arg z_2\right| < \frac{1}{2} V\pi\,.$

$$\int_0^1 \int_0^{\pi/2} x^{c-1}(1-x)^{-1/2}\, {}_2F_1\Big(a,\, b_j\, a+b+1/2\,;\, x\Big)\, e^{i(\alpha+\beta)\theta}(\sin\theta)^{\alpha-1}(\cos\theta)^{\beta-1}$$

$$\times\ H\Big[x^{\gamma} e^{i(\lambda_1+\mu_1)\theta}(\sin\theta)^{\lambda_1}(\cos\theta)^{\mu_1} z_1,\, x^{\partial} e^{i(\lambda_2+\mu_2)\theta}(\sin\theta)^{\lambda_2}(\cos\theta)^{\mu_2} z_2\Big]\, dx\, d\theta$$

$$= \frac{\pi\,\Gamma(a+b+1/2)}{\Gamma(a+1/2)\ \Gamma(b+1/2)} H^{0,\, n_1+4\ :\ m_2, n_2\ :\ m_3, n_3}_{p_1+4,\, q_1+3\ :\ p_2, q_2\ :\ p_3, q_3}$$

$$\times \left[\begin{array}{c|l} z_1\, e^{\pi i \lambda_1/2} & (1-c,\,\gamma,\,\partial),\ (1/2-c+a+b;\,\gamma,\,\partial),\ (1-\alpha_i\,\lambda_1,\,\lambda_2) \\ z_2\, e^{\pi i \lambda_2/2} & (b_j,\,\beta_j,\,B_j)_{1,q_1},\ (1/2-c+a\,;\,\gamma,\,\partial)\ (1/2-c+b\,;\,\gamma,\,\partial), \end{array}\right.$$

$$\times \left. \begin{matrix} (1-\beta_i, \mu_2, \mu_2), (a_j, \alpha_j, A_j)_{1,p_1} : (c_j, \gamma_j)_{1,p_2} : (e_j, E_j)_{1,p_3} \\ (1-\alpha-\beta, \lambda_1+\mu_1; \lambda_2+\mu_2) : (d_j, \delta_j)_{1,q_2} : (f_j, F_j)_{1,q_3} \end{matrix} \right] \quad (2.3)$$

$\text{Re}(c) > 0$, $\text{Re}(2c-a-b) > -1$, $\text{Re}(\alpha) > 0$, $\text{Re}(\beta) > 0$, $\lambda_1 \geq 0$,

$\mu_1 \geq 0$, $\gamma \geq 0$, $\partial \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\mu_2 \geq 0$, $|\arg z_1| < 1/2\,\pi\, u$, $|\arg z_2| < 1/2\,\pi\, v$.

उपपत्ति : (2.1) की स्थापना के लिए H-फलन को इसके समतुल्य कंटूर समाकल से प्रति-स्थापित करें जैसा कि (1.1) में दिया गया है। समाकलन के क्रम को बदल दें जो दिये गये प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है तो हमें प्राप्त होगा—

$$I = \frac{(-1)}{4\pi^2} \int_{L_1} \int_{L_2} \phi_1(\xi, \eta)\, \theta_2(\xi)\, \theta_3(\eta) \left(\int_0^1 \rho_\partial(x)\, x^{(\sigma+\lambda\xi+\sigma\eta)}\, dx \right)$$

$$\times \left(\int_0^1 y^{(c+\mu\xi+\beta\eta)-1} (1-y)^{-1/2}\, {}_2F_1\left(a, b; a+b+1/2; y\right) dy \right) z_1^{\xi}\, z_2^{n}\, d\xi\, d\eta\,.$$

अब परिणाम (1.2) तथा (1.3) का उपयोग करने तथा (1.1) की सहायता से इसकी विवेचना करने पर हमें (2.1) का दाहिना पक्ष प्राप्त होता है।

इसी तरह अग्रसर होते हुए परिणाम (2.2) तथा (2.3) को अनुभाग 1 में दिये गये परिणामों की सहायता से स्थापित किया जा सकता है।

3. विशिष्ट दशाएँ

(2.3) से निम्नांकित समाकलों को वास्तविक तथा काल्पनिक अंशों को समतुल्य करते हुए सीधे प्राप्त किया जा सकता है।

$$\int_0^1 \int_0^{\pi/2} x^{c-1} (1-x)^{-1/2}\, {}_2F_1\left(a, b; a+b+1/2; x\right) \cos(\alpha+\beta)\theta\, (\sin\theta)^{\alpha-1} (\cos\theta)^{\beta-1}$$

$$\times H\left[x^{\gamma} e^{i(\lambda_1+\mu_1)\theta} (\sin\theta)^{\lambda_1} (\cos\theta)^{\mu_1} z_1, x^{\partial} e^{i(\lambda_2+\mu_2)\theta} (\sin\theta)^{\lambda_2} (\cos\theta)^{\mu_2} z_2 \right] dx\, d\theta$$

$$= \frac{\pi\,\Gamma(a+b+1/2)}{\Gamma(a+1/2)\,\Gamma(b+1/2)} \cos\frac{\pi\alpha}{2}\, H^{0, n_1+3\,:\, m_2, n_2\,:\, m_3, n_3}_{p_1+3, q_1+3\,:\, p_2, q_2\,:\, p_3, q_3}$$

$$\times \left[\begin{matrix} z_1\, e^{\pi i \lambda_1/2} \\ z_2\, e^{\pi i \lambda_2/2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (1-c, \gamma, \partial),\ (1-\alpha\,;\lambda_1, \lambda_2),\ (1-\beta\,;\mu_1, \mu_2) \\ (b_j, \beta_j, B_j)_{1, q_1},\ (1/2-c+a\,;\gamma, \partial)\ (1/2-c+b\,;\gamma, \partial), \end{matrix}\right.$$

$$\times \left.\begin{matrix} (a_j, \alpha_j, A_j)_{1, p_1} : (c_j, \gamma_j)_{1, p_2} : (e_j, E_j)_{1, p_3} \\ (1-\alpha-\beta, \lambda_1+\mu_1; \lambda_2+\mu_2) : (d_j, \delta_j)_{1, q_2} : (f_j, F_j)_{1, q_3} \end{matrix}\right] \tag{3.1}$$

तथा

$$\int_0^1 \int_0^{\pi/2} x^{c-1} (1-x)^{-1/2}\, {}_2F_1\left(a, b_j\, a+b+1/2\,; x\right) \sin(\alpha+\beta)\theta\, (\sin\theta)^{\alpha-1} (\cos\theta)^{\beta-1}$$

$$\times H\left[x^{\gamma} e^{i(\lambda_1+\mu_1)\theta} (\sin\theta)^{\lambda_1} (\cos\theta)^{\mu_1} z_1,\ x^{\partial} e^{i(\lambda_2+\mu_2)\theta} (\sin\theta)^{\lambda_2} (\cos\theta)^{\mu_2} z_2\right] dx\, d\theta$$

$$= \frac{\pi\,\Gamma(a+b+1/2)}{\Gamma(a+1/2)\,\Gamma(b+1/2)} \sin\frac{\pi\alpha}{2}\, H^{0, n_1+3\,:\, m_2, n_2\,:\, m_3, n_3}_{p_1+3, q_1+3\,:\, p_2, q_2\,:\, p_3, q_3}$$

$$\times \left[\begin{matrix} z_1\, e^{\pi i \lambda_1/2} \\ z_2\, e^{\pi i \lambda_2/2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (1-c, \gamma, \partial),\ (1/2-c+a+b\,;\gamma, \partial),\ (1-\alpha\,;\lambda_1, \lambda_2), \\ (b_j, \beta_j, B_j)_{1, q_1},\ (1/2-c+a\,;\gamma, \partial)\ (1/2-c+b\,;\gamma, \partial), \end{matrix}\right.$$

$$\times \left.\begin{matrix} (1-\beta, \mu_1, \mu_2),\ (a_j, \alpha_j, A_j)_{1, p_1} : (c_j, \gamma_j)_{1, p_2} : (e_j, E_j)_{1, p_3} \\ (1-\alpha-\beta, \lambda_1+\mu_1; \lambda_2+\mu_2) : (d_j, \delta_j)_{1, q_2} : (f_j, F_j)_{1, q_3} \end{matrix}\right] \tag{3.2}$$

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए. : Higher Transcendental Functions, भाग-I, मकग्राहिल, न्यूयार्क, 1953.

2. मैकराबर्ट, टी. एम. : Math. Ann., 1961, 142, 450-452.

3. रेनविल, ई. डी. : Special Function, मैकमिलन, न्यूयार्क, 1960.

4. श्रीवास्तव, एच. एम., गुप्ता, के. सी. तथा गोयल, एस. पी. : The H-function of one and two variables with Applications. South Asian Publishers, New Delhi, 1982.

5. व्यास, वी. एम. तथा राठी, अर्जुन के. : The Mathematics Education, 1997, 31 (1), 33.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 44, No. 4, October 2001.

व्युत्पन्न फूरियर अनुक्रम के आयलर संकलनीयता की नई कसौटी

केο एसο भाटिया तथा एमο पीο सचान
गणित विभाग, शासकीय मॉडल साइंस कॉलेज, रीवां (मο प्रο)

[प्राप्त — मई 1, 2001]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में लेखकों ने उपयुक्त प्रतिबन्धों के अन्तर्गत व्युत्पन्न फूरियर अनुक्रम की आयलर संकलनीयता से सम्बन्धित दो परिणामों की स्थापना की। इनमें से एक से शुक्ला[8] के परिणाम का सर्वीकरण होता है और दूसरा पर्याप्त प्रतिबन्ध के रूप में है।

Abstract

A new criterion for Euler summability of a derived Fourier sequence. *By* K. S. Bhatia, and M. P. Sachan, Government Model Science College, Rewa (M.P.)

In the present paper, the authors have established a pair of result concerning the Euler summability of a derived Fourier sequence under suitable conditions. One of these generalises well known results of Shukla[8] and other is the sufficient condition.

1. परिभाषाएं तथा संकेतन

परिभाषा : अपरिमित क्रम $\{u_n\}$ को आयलर (E, q) माध्यों द्वारा या संकलनीय (E, q) द्वारा एक परिमित संख्या S में संकलनीय कहा जाता है यदि $q > 0$ के लिए

$$(q+1)^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^{n-k} u_k \to S \text{ ज्यों ज्यों } n \to \infty$$

जहाँ
$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} \tag{1.1}$$

माना कि $f(x)$ फलन है x का जो लेबेस्ग के रूप में अन्तराल $(-\pi, \pi)$ तथा आवर्त 2π के साथ आवर्ती है, माना कि $f(x)$ से सम्बद्ध फूरियर श्रेणी

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin x\right) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x) \qquad (1.2)$$

द्वारा परिभाषित हो जहाँ गुणांक a_n, b_n को निम्नांकित द्वारा दिया जाता है—

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,dx, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

फूरियर श्रेणी **(1.2)** के प्रथम अवकलित (या व्युत्पन्न) श्रेणी, जिसे सामान्यतः $f(x)$ की व्युत्पन्न फूरियर श्रेणी कहते हैं, निम्नवत् है

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(b_n \cos nx - a_n \sin nx\right) \equiv \sum_{1}^{\infty} n B_n(x) \qquad (1.3)$$

व्युत्पन्न फूरियर श्रेणी (1.3) को फूरियर श्रेणी माना जाना आवश्यक नहीं है। व्युत्पन्न फूरियर श्रेणी **(1.3)** के पदों के अनुक्रम $\{n\,Bn\,(x)\}$ को $f(x)$ का व्युत्पन्न फूरियर अनुक्रम कहा जा सकता है।

हम प्रायः निम्नांकित संकेतनों का प्रयोग करेंगे

$$\psi(t) = f(x + t) - f(x - t) - 1$$

$$H(n, t) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} q^{n-k}\frac{(k \sin kt)}{(q + 1)^n}$$

$$P(q, t) = 1 + q^2 + 2q \cos t$$

$$Q(q, t) = \tan^{-1}\left(\frac{\sin t}{q + \cos t}\right)$$

2. प्रस्तावना

हार्डी[1] तथा नाथ[2] ने आयलर संकलनीयता की विशद व्याख्या की है। ज़िगमुण्ड[3], चन्द्रा[4], हालैंड आदि[5], सचान[6], कैथल तथा शर्मा[7] एवं शुक्ला[8] ने हाल के वर्षों में व्युत्पन्न फूरियर

अनुक्रम के लिए **(E, 1)** संकलनीयता की नई कसौटियां प्रस्तुत की हैं।

प्रमेय A : यदि

$$\Psi(t) \equiv \int_0^t |\psi(u)|\, du = 0(t) \text{ ज्यों ज्यों } t \to 0 \tag{2.1}$$

तुष्ट हो तो व्युत्पन्न फूरियर अनुक्रम $\{nB_n(x)\}$ को बिन्दु x पर $1/x$ तक संकलनीय आयलर $(E, 1)$ होने के लिए आवश्यक तथा पर्याप्त प्रतिबन्ध यह होगा कि

$$\int_{2\pi/m}^{(2\pi/m)^{\alpha}} \left\{ \psi(t) - \psi\left(t + \frac{2\pi}{m}\right) \right\} \cos^{n-1}(t/2) \sin\frac{mt}{2}\, dt = o\left(\frac{1}{n}\right) \tag{2.2}$$

ज्यों ज्यों $n \to \infty$, **जहाँ** $0 < \alpha < 1/2$ **तथा** $m = n + 1$.

सक्सेना[8] ने उपर्युक्त प्रमेय के अलावा पर्याप्त प्रतिबन्ध पर भी खोज की है जिससे व्युत्पन्न फूरियर अनुक्रम की (E, P) संकलनीयता आश्वस्त होती है बशर्ते कि (2.1) सत्य हो।

प्रस्तुत टिप्पणी में हमारा उद्देश्य प्रमेय A के परिणामों को आयलर (E, q), $q > 0$, तक विस्तीर्ण करना है जो व्युत्पन्न फूरियर की संकलनीयता है। साथ ही पर्याप्त प्रतिबन्ध देना है जिससे व्युत्पन्न फूरियर अनुक्रम की संकलनीयता (E, q), $q > 0$ के प्रति आश्वस्त हुआ जा सके। वास्तव में हम निम्नांकित को सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 1 : यदि (2.1) सत्य हो तो x बिन्दु पर $\frac{1}{\pi}$ तक व्युत्पन्न फूरियर अनुक्रम $\{nB_n(x)\}$ को संकलनीय आयलर (E, q) $q > 0$ होने के लिए आवश्यक तथा पर्याप्त प्रतिबन्ध होगा—

$$\int_{(\pi/m)}^{(\pi/m)^{\alpha}} \left\{ \psi(t) - \psi\left(t + \frac{\pi}{m}\right) \right\} \frac{\{P(q, t)\}^{\frac{n-1}{2}}}{(q+1)^{n-1}} \sin mt\, dt = o\left(\frac{1}{n}\right) \tag{2.3}$$

ज्यों ज्यों $n \to \infty$, **जहाँ** $0 < \alpha < 1/2$ **तथा** $m = \frac{n+q}{q+1}$.

प्रमेय 2 (पर्याप्त प्रतिबन्ध)

यदि (2.1) तुष्ट होता हो तथा यदि, $m = \frac{n+q}{q+1}$. के लिए

$$\int_{\pi/m}^{\eta} \left| \psi(t) - \psi\left(t + \frac{\pi}{m}\right) \right| \frac{\{P(q, t)\}^{\frac{n-1}{2}}}{(q+1)^{n-1}}\, dt = o\left(\frac{1}{n}\right) \tag{2.4}$$

ज्यों ज्यों $n \to \infty$,

जहाँ η धनात्मक अचर है, तब व्युत्पन्न फूरियर अनुक्रम $\{n B_n (x)\}$ बिन्दु **x** पर $1/\pi$ तक संकलनीय आयलर $(E, q)\, q > 0$ होगा।

3. प्रारम्भिक प्रमेयिकाएँ

प्रमेयों को सिद्ध करने के लिए हमें निम्नांकित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी—

प्रमेयिका 1 : यदि $0 < q \leq 1$ तथा $0 \leq t \leq \pi$, तो

$$\frac{\{P(q, t)\}^{n/2}}{(q+1)^n} = O\left[\exp\left(\frac{-nqt^2}{2\pi^2}\right)\right] \text{ज्यों ज्यों } n \to \infty$$

उपपत्ति : यह प्रमेयिका रे द्वारा[9] प्राप्त है क्योंकि यदि $0 \leq t \leq \pi/2$। इसको $0 \leq t \leq \pi$ के लिए सचान[10] के स्वतन्त्र रूप से सिद्ध किया है। किन्तु पूर्णता की दृष्टि से हम उसे ज्यों का त्यों दे रहे हैं

$0 < q \leq 1$ तथा $0 \leq t \leq \pi$ के लिए हमें प्राप्त है

$$\left\{\frac{P(q, t)}{(q+1)^n}\right\}^{n/2} = \left[\frac{1 + q^2 + 2q\left(1 - 2\sin^2 t/2\right)}{(q+1)^n}\right]^{n/2}$$

$$= \left[\frac{1 - 4q\sin^2 t/2}{(q+1)^2}\right]^{n/2} \leq \left\{1 - \frac{qt^2}{\pi^2}\right\}^{n/2}$$

चूँकि $0 < q \leq 1$ तथा $\sin t/2 \geq t/\pi$, क्योंकि $0 \leq t \leq \pi$

$$= \left[1 + \left(\frac{-nqt^2}{\pi^2}\right) + \frac{(1 - 1/n)}{2!}\left(\frac{-nqt^2}{\pi^2}\right)^2 + \dots\right]^{1/2}$$

$$= O\left[\left\{e^{(-nqt^2)/\pi^2}\right\}^{1/2}\right]$$

$$= O\left[\exp\left(\frac{-nqt^2}{2\pi^2}\right)\right]$$

प्रमेयिका 2 : लघु $t > 0$ के लिए

$$Q(q, t) \equiv \tan^{-1}\left(\frac{\sin t}{q + \cos t}\right) = \frac{t}{q+1} + t^3 A(t)$$

जहाँ $A(t)$ t का घात फलन है जिसमें $0 < A(t) < \frac{1}{3}$

उपपत्ति : लघु $t > 0$, के लिए, $Q(q, t)$ को मैक्लारिन प्रमेय द्वारा t के धनात्मक घातों में प्रसारित करने पर हमें

$$Q(q, t) = \tan^{-1}\left(\frac{\sin t}{q + \cos t}\right)$$

$$= \frac{t}{q+1} + \frac{q(1-q)}{(q+1)^3}\frac{t^3}{3!} + \dots$$

$$= \frac{t}{q+1} + t^3 A(t)$$

प्राप्त होता है जहाँ

$$0 < A(t) < \frac{2q(1-q)}{b(q+1)^3} < \frac{1}{3}$$

प्रमेयिका 3 : यदि **(2.1)** सत्य हो तथा यदि $0 < \alpha < 1/2$, तो

$$z \equiv m \int_{\pi/m}^{(\pi/m)^\alpha} \psi(t + \pi/m) \left[\frac{\{P(q, t)\}^{\frac{n-1}{2}} - \{P(q, t + \pi/m)\}^{\frac{n-1}{2}}}{(q+1)^{n-1}}\right] \sin mt\, dt$$

ज्यों ज्यों $n \to \infty$, **जहाँ** $m = \frac{n+q}{q+1}$.

उपपत्ति : चूँकि

$$\{P(q, t)\}^{\frac{n-1}{2}} = \left(1 + q^2 + 2q\cos t\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

संतत है और t के किसी भी परिमित अन्तराल में t के प्रति अकलनीय है अतः हमें अवकल फलन के माध्य मान प्रमेय से

$$\frac{\{P(q,t)\}^{\frac{n-1}{2}} - \{P(q,t+\pi/m)\}^{\frac{n-1}{2}}}{t-(t+\pi/m)} = \left[\frac{d}{d\theta}\{P(q,\theta)\}^{\frac{n-1}{2}}\right]$$

जहाँ $\theta = t + \frac{c\pi}{m}, \quad (0 < c < 1)$

$$= \frac{n-1}{2}\{P(q,\theta)\}^{\frac{n-1}{2}-1}(-2q\sin\theta)\,\theta = t + \frac{c\pi}{m} \text{ के लिए}$$

$$= -(n-1)\,q\left\{P\left(q,\,t+\frac{c\pi}{m}\right)\right\}^{\frac{n-3}{2}}\sin\left(t+\frac{c\pi}{m}\right)$$

प्राप्त होता है जहाँ से

$$\{P(q,t)\}^{\frac{n-1}{2}} - \left\{P\left(q,\,t+\frac{\pi}{m}\right)\right\}^{\frac{n-1}{2}}$$

$$= \frac{(n-1)}{m}\pi q\left\{P\left(q,\,t+\frac{c\pi}{m}\right)\right\}^{\frac{n-3}{2}}\sin\left(t+\frac{c\pi}{m}\right) \qquad (3.1)$$

हम यह भी पाते हैं कि किसी η के लिए $0<\eta<1/2$ होने पर, समाकलन फलन के द्वितीय माध्य मान से प्राप्त होता है—

$$\pi\int_{\pi/m}^{(\pi/m)^{\eta}}\frac{\psi(t+\pi/m)}{t}\left[\frac{\{P(q,t)\}^{\frac{n-1}{2}} - \{P(q,t+\pi/m)\}^{\frac{n-1}{2}}}{(q+1)^{n-1}}\right]\sin mt\,dt$$

$$= m\int_{\pi/m}^{(\pi/m)^{\alpha}}\psi(t+\pi/m)\left[\frac{\{P(q,t)\}^{\frac{n-1}{2}} - \{P(q,t+\pi/m)\}^{\frac{n-1}{2}}}{(q+1)^{n-1}}\right]\sin mt\,dt \qquad (3.2)$$

अतः (3.1)ä (3.2) तथा (2.1) का उपयोग करने पर—

$$z = \left| m\int_{\pi/m}^{(\pi/m)^{\alpha}}\psi(t+\pi/m)\left[\frac{\{P(q,t)\}^{\frac{n-1}{2}} - \{P(q,t+\pi/m)\}^{\frac{n-1}{2}}}{(q+1)^{n-1}}\right]\sin mt\,dt \right|$$

$$= \left| \pi \int_{(\pi/m)}^{(\pi/m)^\eta} \frac{\psi(t + \pi/m)}{t} \frac{\left[\{P(q, t)\}^{\frac{n-1}{2}} - \{P(q, t + \pi/m)\}^{\frac{n-1}{2}} \right]}{(q + 1)^{n-1}} \sin mt \, dt \right|$$

$$= \left| (\pi)^2 \frac{(n-1)q}{m} \int_{(\pi/m)}^{(\pi/m)^\eta} \frac{\psi(t + \pi/m)}{t} \frac{\{P(q, t + c\pi/m)\}^{\frac{n-3}{2}}}{(q + 1)^{n-1}} \sin(t + c\pi/m) \sin mt \, dt \right|$$

$$\leq O(1) \int_{(\pi/m)}^{(\pi/m)^\eta} \left| \frac{\psi(t + \pi/m)}{t} \right| O(1) \,.\, O(t) \, dt$$

$$\leq O(1) \int_{(\pi/m)}^{(\pi/m)^\eta} |\psi(t + \pi/m)| \, dt$$

$=0(1)$ ज्यों ज्यों $n \to \infty$, क्योंकि $m = \dfrac{n + q}{q + 1}$ तथा $mt > c\pi$

4. अनुक्रम $\{n B_n(x)\}$ का (E, Q) रूपान्तर

यदि $Sn(x) f(x)$ की व्युत्पन्न फूरियर श्रेणी $\sum_1^\infty n B_n(x)$ का nवां आंशिक योगफल हो तो

$$S_n(x) \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_0^\pi (k \sin kt) \, [f(x + t) \, f(x - t)] \, dt$$

जिससे अनुक्रम $\{n B_n(x)\}$ का n वां पद $n B_n(\mathrm{x})$ निम्नांकित द्वारा दिया जाता है—

$$n B_n(x) \equiv n\left(b_n \cos nx - a_n \sin nx \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x + t) - f(x - t)] \, (n \sin nt) \, dt$$

फलस्वरूप अनुक्रम $\{n B_n(x)\}$ का आयलर (E, q) रूपान्तर E_n^q निम्न रूप में प्राप्त किया जाता है—

$$E_n^q = (q + 1)^{-n} \int_0^\pi \{f(x + t) - f(x - t)\} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} q^{n-k} \, (k \sin kt) \right\} dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \{ f(x+t) - f(x-t) \} H(n, t)\, dt \qquad (4.1)$$

जहाँ $$H(n, t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{q^{n-k} (k \sin kt)}{(q+1)^n}$$

तथा

$$\int_0^{\pi} H(n, t)\, dt = \sum_{k=0}^{n} \int_0^{\pi} \binom{n}{k} \frac{q^{n-k} (k \sin kt)}{(q+1)^n}\, dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{q^{n-k}}{(q+1)^n} \int_0^{\pi} (k \sin kt)\, dt$$

चूँकि $H(n, t)$ को परिभाषित करने वाली श्रेणी समान रूप से अभिसारी है।

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{q^{n-k}}{(q+1)^n} \left[1 - (-1)^k \right]$$

$$= 1 - (q+1)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \binom{n}{k} q^{n-k} (-1)^k \right\}$$

$$= 1 - (q+1)^{-n} \{q - 1\}^{n}$$

$=1-0(1)$, ज्यों ज्यों $n \to \infty$

जिससे कि

$$\frac{1}{\pi} \{1 - o(1)\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} H(n, t)\, dt \qquad (4.2)$$

अब (4.1) से (4.2) को घटाने से

$$E_n^q - \frac{1}{\pi} + o(1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \{ f(x+t) - f(x-t) - 1 \} H(n, t)\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \psi(t) H(n, t)\, dt \qquad (4.3)$$

किन्तु

$$H(n, t) = (q + 1)^{-n} I_p \left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^{n-1} \left(ke^{ikt} \right) \right\}$$

$$= \frac{n}{(q + 1)^n} I_p \left\{ e^{it} \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k-1} q^{n-k} e^{i(k-t)t} \right\}$$

$$= \frac{n}{(q + 1)^n} I_p \left\{ e^{it} \left(q + e^{it} \right)^{n-1} \right\}$$

$$= \frac{n}{(q + 1)^n} r_t^{n-1} \sin\left\{ (n - 1)\theta_t + t \right\}$$

$$= \frac{n}{(q + 1)^n} \frac{\{P(q, t)\}^{(n-1)/2}}{(q + 1)^{n-1}} \sin\{ (n - 1) Q(q, t) + t \} \tag{4.4}$$

जहाँ

$$r_t e^{i\theta t} \equiv \left(q + e^{it} \right) \equiv \{ P(q, t) \}^{1/2} e^{iQ(q, t)}$$

अर्थात्

$$P(q, t) = r_t^2 = (q + \cos t)^2 + \sin^2 t = 1 + q^2 + 2q \cos t$$

तथा

$$Q(q, t) \equiv \theta_t = \tan^{-1} \left(\frac{\sin t}{q + \cos t} \right)$$

(4.3) तथा (4.4) से स्पष्ट है कि

$$E_n^q - \frac{1}{\pi} + 0(1)$$
$$= \frac{n}{\pi (q + 1)^n} \int_0^{\pi} \psi(t) \frac{\{P(q, t)\}^{(n-1)/2}}{(q + 1)^{n-1}} \sin\{ (n - 1) Q(q, t) + t \} \, dt \tag{4.5}$$

5. प्रमेय 1 की उपपत्ति

(4.5) के द्वारा $\{n B_n(x)\}$ के (E, q) रूपान्तर $\{E_n^q\}$ को निम्नवत् लिखा जा सकता है

$$E_n^q - \frac{1}{\pi} = \frac{n}{\pi (q+1)^n} \int_0^{\pi} \psi(t)$$

$$\times \frac{\{P(q,t)\}^{(n-1)/2}}{(q+1)^{n-1}} \sin\{(n-1)Q(q,t)+t\}\, dt + o(1)$$

जो प्रमेयिका 2 का उपयोग करके तथा $Q(q,t)$ के लिए प्रथम सन्निकटन लेने पर निम्नांकित में समानीत हो जाता है।

$$E_n^q - \frac{1}{\pi} = \frac{n}{\pi(q+1)} \int_0^{\pi} \psi(t) \times \frac{\{P(q,t)\}^{(n-1)/2}}{(q+1)^{n-1}} \sin\left\{\left(\frac{n+q}{q+1}\right)t\right\} dt + o(1)$$

$$= \frac{1}{\pi(q+1)} I + o(1), \text{ माना} \tag{5.1}$$

अब हम लिखेंगे

$$I \equiv n \int_0^{\pi} \psi(t) \frac{\{P(q,t)\}^{(n-1)/2}}{(q+1)^{n-1}} \sin\left\{\left(\frac{n+q}{q+1}\right)t\right\} dt$$

$$= n\left[\int_0^{\pi/m} + \int_{\pi/m}^{(\pi/m)^{\alpha}} + \int_{(\pi/m)^{\alpha}}^{\pi}\right] \psi(t) \frac{\{P(q,t)\}^{(n-1)/2}}{(q+1)^{n-1}} \sin mt\, dt$$

$$= J_1 + J_2 + J_3, \text{ माना}$$

जहां $m = \frac{n+q}{q+1}$. तथा $0 < \alpha < 1/2$

(2.1) से हमें मिलता है

$$\left|J_1\right| \leq n \int_0^{\pi/m} |\psi(t)| \left|\frac{\{P(q,t)\}^{(n-1)/2}}{(q+1)^{n-1}}\right| |\sin mt|\, dt$$

$$= n \int_0^{\pi/m} |\psi(t)|\, 0(1)\, dt$$

$= 0\,(n)\; o\,(\pi/m)$

$= o(1)$, ज्यों ज्यों $n \to \infty$, क्योंकि

$$m = \frac{n+q}{q+1}. \tag{5.2}$$

J_3 पर विचार करने तथा प्रमेयिका 1 का उपयोग करने पर

$$\left|J_3\right| \le n \int_{(\pi/m)^{\alpha}}^{\pi} |\psi(t)|\; 0\left[\exp\frac{\{-(n-1)\,q\,t^2\}}{2\pi^2}\right] dt$$

$$= 0\left|\frac{n}{\dfrac{\exp\{(n-1)\,q\}}{2\pi^{2-2\alpha}}\left(\dfrac{q+1}{n+q}\right)^{2\alpha}}\right| O(1)$$

$$= o(1)\; O(1) = o(1),\ \text{ज्यों ज्यों } n \to \infty, \text{क्योंकि } m = \left(\frac{n+q}{q+1}\right). \tag{5.3}$$

J_2 के अनुमान के लिए हम $\frac{\pi}{m} = a_1$, $\left(\frac{\pi}{m}\right)^{\alpha} = b_1$ लिखेंगे और

$$2\,J_2 = 2n \int_{\pi/m}^{(\pi/m)^{\alpha}} \psi(t)\, \frac{\{P(q,\,t)\}^{(n-1)/2}}{(q+1)^{n-1}} \sin m\,t\; dt$$

(प्रमेयिका **1** तथा उसके अनुमान से)।

इस प्रकार हमने प्रदर्शित किया है कि

$$J_2 = \frac{n}{2} \int_{\pi/m}^{(\pi/m)^{\alpha}} \{\psi(t) - \psi(t + \pi/m)\}$$

$$\times \frac{\{P(q,\,t)\}^{(n-1)/2}}{(q+1)^{n-1}} \sin m\,t\; dt + o(1) \tag{5.4}$$

अन्त में (5.1), (5.2), (5.3) एवं (5.4) से प्राप्त परिणामों के संकलन से हमें प्राप्त होगा—

$$E_n^q - \frac{1}{\pi} = \frac{n}{2} \int_{\pi/m}^{(\pi/m)^\alpha} [\psi(t) - \psi(t + \pi/m)] \times \frac{\{P(q, t)\}^{(n-1)/2}}{(q+1)^{n-1}} \sin mt \, dt + o(1) \tag{5.5}$$

(5.5) से यह निकलता है कि व्युत्पन्न फूरियर अनुक्रम $\{n B_n(x)\}$ के $1/\pi$ तथा $q > 0$ के लिए संकलनीय आयलर (E, q) होने के लिए आवश्यक तथा पर्याप्त प्रतिबन्ध होगा—

$$\int_{\pi/m}^{(\pi/m)^\alpha} [\psi(t) - \psi(t + \pi/m)] \frac{\{P(q, t)\}^{(n-1)/2}}{(q+1)^{n-1}} \sin mt \, dt = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

ज्यों ज्यों $n \to 0$, बशर्ते कि 2.1) तुष्ट हो। इस तरह प्रमेय 1 की उपपत्ति पूर्ण हुई।

6. प्रमेय की उपपत्ति

प्रमेय 2 को प्रमेय 1 द्वारा सिद्ध करने के लिए यह प्रदर्शित करना पर्याप्त होगा कि आवश्यक तथा पर्याप्त प्रतिबन्ध

$$\int_{\pi/m}^{(\pi/m)^\alpha} \{\psi(t) - \psi(t + \pi/m)\} \frac{\{P(q, t)\}^{(n-1)/2}}{(q+1)^{n-1}} \sin mt \, dt = o\left(\frac{1}{n}\right) \tag{6.1}$$

ज्यों ज्यों $n \to 0$ तुष्ट होता है यदि (2.4) सत्य है। यह स्पष्ट है कि

$$\left| \int_{\pi/m}^{(\pi/m)^\alpha} \{\psi(t) - \psi(t + \pi/m)\} \frac{\{P(q, t)\}^{(n-1)/2}}{(q+1)^{n-1}} \sin mt \, dt \right|$$

$$\leq \int_{\pi/m}^{(\pi/m)^\alpha} |\{\psi(t) - \psi(t + \pi/m)\}| \frac{\{P(q, t)\}^{(n-1)/2}}{(q+1)^{n-1}} \, dt$$

$$= n \int_{a_1}^{b_1} \psi(t) \frac{\{P(q, t)\}^{(n-1)/2}}{(q+1)^{n-1}} \sin mt \, dt$$

$$- n \int_0^{b_1 - a_1} \psi\left(t + \frac{\pi}{m}\right) \frac{\left\{P\left(q, t + \frac{\pi}{m}\right)\right\}^{(n-1)/2}}{(q+1)^{n-1}} \sin mt \, dt$$

$$= n \int_{a_1}^{b_1} \psi(t) \frac{\{P(q, t)\}^{(n-1)/2}}{(q+1)^{n-1}} \sin mt\, dt$$

$$- n \left[\int_0^{a_1} + \int_{a_1}^{b_1} + \int_{b_1}^{b_1 - a_1} \right] \psi\left(t + \frac{\pi}{m}\right) \frac{\left\{P\left(q, t + \frac{\pi}{m}\right)\right\}^{(n-1)/2}}{(q+1)^{n-1}} \sin mt\, dt$$

$$= n \int_{a_1}^{b_1} \left[\psi(t) - \left(t + \frac{\pi}{m}\right) \right] \frac{\{P(q, t)\}^{(n-1)/2}}{(q+1)^{n-1}} \sin mt\, dt$$

$$+ n \int_{a_1}^{b_1} \psi\left(t + \frac{\pi}{m}\right) \left[\frac{\{P(q, t)\}^{(n-1)/2} - \left\{P\left(q, t + \frac{\pi}{m}\right)\right\}^{(n-1)/2}}{(q+1)^{n-1}} \right] \sin mt\, dt$$

$$- n \left[\int_0^{a_1} - \int_{b_1 - a_1}^{b_1} \right] \psi\left(t + \frac{\pi}{m}\right) \frac{\left\{P\left(q, t + \frac{\pi}{m}\right)\right\}^{(n-1)/2}}{(q+1)^{n-1}} \sin mt\, dt$$

$$= J_{2.1} + J_{2.2} - J_{2.3} + J_{2.4}, \text{ माना}$$

$J_{2.2}$ में प्रमेयिका 3 को सम्प्रयुक्त करने पर

$J_{2.2} = o(1)$, ज्यों ज्यों $n \to \infty$, क्योंकि $m = \dfrac{n+q}{q+1}$

इसके बाद चर को बदलने तथा (2.1) का उपयोग करने पर

$$|J_{2.3}| = \left| n \int_{\pi/m}^{2\pi/m} \psi(t) \frac{\{P(q, t)\}^{(n-1)/2}}{(q+1)^{n-1}} (-\sin mt)\, dt \right|$$

$$\leq n \int_{\pi/m}^{2\pi/m} |\psi(t)|\, dt = o(1)$$

ज्यों ज्यों $n \to \infty$, क्योंकि $m = \dfrac{n+q}{q+1}$

तथा

$$|J_{2.4}| = \left| n \int_{b_1}^{b_1+a_1} \psi(t) \frac{\{P(q, t)\}^{(n-1)/2}}{(q+1)^{n-1}} (-\sin mt)\, dt \right|$$

$$\leq n \int_{b_1}^{b_1+a_1} |\psi(t)|\, O\left[\exp\left\{\frac{-(n-1)qt^2}{2\pi^2}\right\} dt\right]$$

$$= o(1), \text{ ज्यों ज्यों } n \to \infty, \text{ क्योंकि } \quad m = \frac{n+q}{q+1}$$

$$= o\left(\frac{1}{n}\right), \text{ ज्योंज्यों } n - \infty$$

(**2.4** के प्रयोग से तथा यह दिखाता है कि यदि **(2.4)** सत्य हो तो **(6.1)** तुष्ट होता है) इस तरह प्रमेय 2 पूरी तरह पूर्ण हुआ।

टिप्पणियाँ : यह टिप्पणी करना रोचक होगा कि

(1) शुक्ला द्वारा [8] प्रदत्त प्रमेय A प्रमेय 1 की विशिष्ट दशा $q = 1$ है अतः हमारे द्वारा सिद्ध किया गया प्रमेय 1 शुक्ला के प्रमेय A का सार्वीकरण है।

(2) इसी तरह शुक्ला[8] ने व्युत्पन्न फूरियर श्रेणी की $(E, 1)$ संकलनीयता के लिए जो अतिरिक्त प्रतिबन्ध दिया है वह भी हमारे प्रमेय 2 की विशिष्ट दशा है।

निर्देश

1. हार्डी जी. एच. : Divergent Series, आक्सफोर्ड, 1967.
2. नाप, के. : Mathematische Zeitschrift.
3. ज़िगमुंड, ए. : Trigonometrical Series, द्वितीय संस्करण, भाग 1, कैम्ब्रिज, 1959.
4. चन्द्रा, पी. : Math. Student, 1971, 39, 262; Mathematica 1972, 5 (2), 8-13.
5. हालैंड, ए. एस. बी., साहनी, बी. एन. तथा जिम्बैलारियो, जे. : Bolletino U.M.I 1975, 12 (4), 315-320.
6. सचान, एम. पी. : पी-एच. डी. थीसिस, ए. पी. एस. विश्वविद्यालय, रीवाँ 1983.
7. कैथल, पी. डी. तथा शुक्ला, एच. एल. : विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका, 1983, 26 (4), 331-339.
8. सक्सेना, के. : Math. student, 1983, 51 (1-4), 235-238.
9. रे, बी. के. : Indian Jour. Math. 1969, 11, 43-50.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 44, No. 4, October 2001.

चित्रकूट क्षेत्र की कोरकू (प्रशाखा-मवइया) जनजाति का समाज वैज्ञानिक अध्ययन

प्रमोद कुमार मिश्र
श्री मुरली मनोहर टाउन स्नातकोत्तर महाविद्यालय, बलिया (उ० प्र०)

[प्राप्त — जुलाई 9, 2001]

सारांश

चित्रकूट क्षेत्र की कोरकू (प्रशाखा-मवइया) जनजाति का आर्थिक एवं सामाजिक स्तर का अध्ययन 1997 में किया गया जिसके लिए ग्राम मोहकमगढ़, तहसील रघुराजनगर, जिला सतना (म० प्र०) के तीस परिवारों के मुखिया से परिवार का स्तर, सदस्यों की संख्या, परिवार के लोगों का शैक्षिक स्तर, व्यवसाय, मासिक आय, पारिवारिक बजट, पारिवारिक समस्या आदि के बारे में साक्षात्कार करके पूछताछ की गई।

प्राप्त परिणामों से पता चला कि इस जनजाति के अधिकांश लोग अशिक्षित थे और उनका परिवार अधिकतर एकाकी था और वे जंगल से लकड़ी काटकर बेचते हैं। इनमें अधिकांश लोगों की मासिक आय 1500 से 2000 रुपये के बीच थी। इनके घर में अलग से रसोईघर नहीं था और घर के आस-पास का वातावरण काफी गन्दा देखने को मिला। इन्हें साक्षर बनाकर ही विकास की ओर अग्रसर किया जा सकेगा।

Abstract

Sociological study of *Korku* (Prashakha-Mawaiya) tribe of Chitrakoot region. *By* Pramod Kumar Mishra, Shri Murli Manohar Town Post Graduate College, Ballia (U.P.).

A study of *Korku* tribe of Chitrakoot region was conducted during 1997 in order to find out its economic and social status. Thirty families of Mawaiya Prashakha consisting of members living in the village Mohakamgrah, teshil Raguraj Nagar, District Satna (M.P.) were

interviewed for their family status, number of members in the families, their educational status, their occupations, their monthly income, their family budgets, their housing problems and their surroundings.

It was found that most of the members were illiterate and lived in single family. They earned their livelihood through daily wages or cutting and selling wood and their income per family was mostly in the range of 1500 to 2000 rupees. They lived in mud huts with no separate kitchens and their surrounding was dirty.

1991 की जनगणना के अनुसार आदिवासियों की जनसंख्या 1.54 करोड़ थी जो भारत देश के सभी प्रान्तों से सर्वाधिक थी। उल्लेख्य है कि मध्य प्रदेश में अनुसूचित जनजातियों की संख्या 46 बताई गई है।

म० प्र० राज्य में आदिवासियों के विकास के लिए विभिन्न प्रयास किये जा रहे हैं। राज्य में आदिवासियों का एक अलग प्रकार का रहन-सहन का स्तर है। आदिवासी अपनी सांस्कृतिक विरासत के कारण प्रदेश के विभिन्न स्थानों पर निवास कर रहे हैं। म० प्र० राज्य में आदिवासियों को विभिन्न प्रकार के पारम्परिक लौकिक एवं मौलिक अधिकार प्राप्त हैं। राज्य की प्राकृतिक वन सम्पदा को संरक्षित रखने में आदिवासियों का विशिष्ट योगदान है और इनका वनों से सीधा सम्बन्ध है। इन्हें अपनी आय का बहुत बड़ा भाग वनों की लकड़ी एवं जड़ी-बूटियों से ही प्राप्त होता है। म० प्र० सरकार आदिवासियों के लिए अलग प्रकार की वननीति बना रही है जिससे वनों का दोहन रोका जा सके एवं आदिवासियों को पर्याप्त मात्रा में जलाने वाली लकड़ी एवं फल-फूल भी प्राप्त होते रहें। देश की राष्ट्रीय आय में भी आदिवासियों का प्रत्यक्ष या अप्रत्यक्ष रूप से योगदान है। देश से करोड़ों रुपये का तेन्दू पत्ता विदेशों को निर्यात किया जाता है जिसका संग्रह देश में आदिवासियों के द्वारा ही होता है।

म० प्र० के 45 ज़िलों में गोंड़, मुण्डा, कोरकू (प्रशाखा-मवइया), नगसिया, सहरिया, निहाल, भील, ओरांव, भिलाला, परधान, अन्ध, परधी, बैंगा, पंरजा, भैना, साओला, मारिया, भूमिया, सवर, भतरा, अगारिया, भूजिया, बियार बिझवार, माझी, बिरहोर, मवासी, धनवार, नट, गड़ावा, पतिका पाओ कमार सौर काबर, सोवर खैरवार करकू, खड़िया, कीर, खोंड, मोगिया, कोल, भीलमीना, कोलम, दमोर, कोरवां, गसरिया, झझवार एवं मीना आदि जनजातियों के लोग पाये जाते हैं। अकेले सतना जिले में 1991 की जनगणना के अनुसार आदिवासियों की संख्या 202412 थी और इस जिले के मोहकमगढ़ गाँव के कोरकू (प्रशाखा-मवइया) जाति के आदिवासियों की संख्या 287 थी। चित्रकूट के आस-पास पहाड़ों एवं जंगलों में मवइया नामक प्रशाखा निवास करती है। ये लोग सभ्य जगत के लोगों के लिए आकर्षण का केन्द्र बने हुए हैं। विभिन्न संस्थाओं द्वारा इनके बीच कुछ कल्याणकारी कार्यक्रम भी चलाये जा रहे हैं परन्तु अभी तक इनके विषय में कोई महत्त्वपूर्ण अध्ययन नहीं किया गया। इसी आवश्यकता को देखते हुए चित्रकूट क्षेत्र के ग्राम मोहकमगढ़ की मवइया प्रशाखा का अध्ययन निम्नांकित उद्देश्यों से किया गया।

1. आदिवासियों के आर्थिक एवं सामाजिक स्थिति का पता लगाना।

2. उनके रहन-सहन की स्थिति की जानकारी प्राप्त करना।

3. आदिवासियों के व्यवसाय एवं आर्थिक कार्यों पर प्रकाश डालना।

4. आदिवासियों की सामाजिक एवं आर्थिक समस्याओं का पता लगाना।

प्रयोगात्मक

अध्ययन का क्षेत्र : जिला सतना की तहसील रघुराजनगर के अन्तर्गत मझगवा विकास खण्ड के मोहकमगढ़ गाँव के तीस आदिवासी परिवारों का अध्ययन किया गया।

साक्षात्कार अनुसूची के माध्यम से परिवार के मुखिया का साक्षात्कार किया गया और उनसे मिलकर प्राथमिक आँकड़े एकत्रित किये गये। जहाँ आवश्यकता हुई वहाँ पुस्तकों-पत्रिकाओं-समाचारपत्रों आदि से द्वितीयक आँकड़ों का भी प्रयोग किया गया। तथ्यों का संकलन करने के बाद उनकी सारणियाँ बनाईं गईं और उसकी व्याख्या की गई।

उत्तरदाताओं की पृष्ठभूमि

सारणी **1** से पता चलता है कि 20 प्रतिशत उत्तरदाता 35 से 40 के थे और 16.6 प्रतिशत के लगभग उत्तरदाता 25 से 30 वर्ष के थे और 30 से 35 वर्ष और 50 वर्ष से अधिक आयु वर्ग के उत्तरदाता 16.7 प्रतिशत थे। सबसे कम उत्तरदाता 6.7 प्रतिशत 45-50 वर्ष आयु के थे। सारणी को देखने से पता चलता है कि लगभग 44 प्रतिशत उत्तरदाता युवा वर्ग के थे। हमारे देश में औसत आयु 61.4 वर्ष आँकी गई है जबकि जापान के लोगों की औसत आयु विश्व में सर्वाधिक है।

सारणी 1 उत्तरदाताओं की आयु

क्र. सं.	आयु वर्ष में	उत्तरदाताओं की संख्या	प्रतिशत
1.	20-25	3	10.0
2.	25-30	5	16.6
3.	30-35	5	16.7
4.	35-40	6	20.0
5.	40-45	4	13.3
6.	45-50	2	6.7
7.	50 से अधिक	5	16.7
योग		30	100

चित्रकूट
अध्ययन क्षेत्र



विवाह : कोरकू जनजाति की मवइया प्रशाखा में विवाह के समय कन्या का मूल्य वर पक्ष को अदा करना होता है। इनमें विधवा विवाह भी प्रचलन में है।

सारणी 2
उत्तरदाताओं का वैवाहिक स्तर

क्र. सं.	वैवाहिक स्तर	संख्या	प्रतिशत
1.	अविवाहित	1	3.3
2.	विवाहित	27	90.0
3.	विधुर/विधवा	2	6.7
योग		30	100

अध्ययन क्षेत्र के उत्तरदाता आदिवासियों में अविवाहित लोग 3.3 प्रतिशत ही थे। अन्य लोगों में विवाहितों का प्रतिशत 90 था और 6.7 प्रतिशत लोग विधवा/विधुर पाये गये। इस सर्वेक्षण से स्पष्ट होता है कि इसमें अधिकतर लोग विवाहित ही होते हैं।

शिक्षा का स्तर

शिक्षा ही किसी भी व्यक्ति का समग्र विकास करने की क्षमता रखती है। हमारे देश में 1991 की जनगणना को देखने से पता चलता है कि 52.2 प्रतिशत लोग ही शिक्षित थे लेकिन वर्तमान जनगणना 2001 के अनुसार देश में साक्षर लोगों की जनसंख्या बढ़कर 65.38 प्रतिशत हो गई है। पूरे विश्व पर दृष्टिपात करने पर हमें पता चलता है कि जहाँ पर लोग अधिक शिक्षित हैं उस देश में चौमुखी विकास हुआ है। शिक्षा के द्वारा ही व्यक्ति के सूझ-बूझ में तार्किक विकास होता है।

सारणी 3 : उत्तरदाताओं का शैक्षिक स्तर

क्र. सं.	शैक्षिक स्तर	संख्या	प्रतिशत
1.	अशिक्षित	24	80.0
2.	प्राथमिक	5	16.7
3.	जूनियर हाईस्कूल	0	0.0
4.	हाईस्कूल	1	3.3
5	इण्टर या इण्टर से अधिक	–	–
	योग	30	100

उत्तरदाताओं में 80 प्रतिशत लोग अशिक्षित थे। उक्त लोगों में प्राथमिक स्तर तक 16.7 प्रतिशत लोग शिक्षा ग्रहण किये थे और हाईस्कूल तक केवल 3.3 प्रतिशत लोग ही शिक्षित थे। इसी के साथ ही जूनियर हाईस्कूल और इण्टर या उससे अधिक की शिक्षा कोई उत्तरदाता नहीं ग्रहण किया था।

पारिवारिक स्वरूप

हमारे देश में पहले ज्यादातर लोग संयुक्त परिवार में रहते थे लेकिन जैसे-जैसे लोगों का आर्थिक और समग्र विकास तेज होता गया वैसे-वैसे संयुक्त परिवार भी एकाकी परिवार का रूप धारण करते जा रहे हैं। इस परिवर्तन का प्रभाव आदिवासियों में भी देखने को मिलता है। परिवार में सदस्यों की संख्या का भी काफी महत्त्व है।

सारणी 4 से स्पष्ट है कि उत्तरदाताओं के परिवार का स्वरूप मिश्रित प्रकार का है जिसमें 76.7 प्रतिशत लोग एकाकी परिवार के सदस्य हैं और 23.3 प्रतिशत लोग संयुक्त परिवार में अपने आपको पिरोये थे।

सारणी 4 : उत्तरदाताओं के परिवार का स्वरूप

क्र. सं.	परिवार	संख्या	प्रतिशत
1.	एकांकी परिवार	23	76.7
2.	संयुक्त परिवार	7	23.3
	योग	30	100.0

सारणी 5 : परिवार की सदस्य संख्या

क्र. सं.	परिवार के सदस्यों का वर्ग अन्तराल	संख्या	प्रतिशत
1.	2 — 5	19	63.4
2.	6 — 9	7	23.3
3.	10 — 15	4	13.3
योग		30	100.0

सारणी 5 स्पष्ट है कि 2 से 5 सदस्यों वाले परिवार का प्रतिशत 63.4, 6 से 9 परिवार वाले सदस्यों का प्रतिशत 23.3 और 10 से 15 परिवार वाले सदस्यों का प्रतिशत 13.3 है। इस तरह अधिकतर लोग एकांकी परिवार की संख्या से जुड़े हुए हैं।

व्यवसाय

किसी भी देश व समाज का व्यावसायिक ढाँचा प्रत्यक्ष व अप्रत्यक्ष रूप से कृषि उद्योग और सेवा क्षेत्रों पर आधारित होता है। यही नियम आदिवासियों पर भी लागू होता है। सामान्यतः इन लोगों की सहभागिता कृषि एवं वन उपज पर आधारित होती है।

सारणी 6

उत्तरदाताओं का व्यवसाय

क्र. सं.	व्यवसाय	संख्या	प्रतिशत
1.	मजदूरी	23	76.7
2.	कृषि	3	10.0
3.	नौकरी	3	10.0
4.	अन्य	1	3.3
योग		30	100.0

स्पष्ट है कि उत्तरदाताओं की आय का मुख्य स्रोत मजदूरी है। कृषि तथा नौकरी में 10-10 प्रतिशत लोग लगे थे।

मासिक आय

उत्तरदाताओं के 16.7 प्रतिशत लोगों की आय 500 से 1000 रूपया प्रतिमाह 33.3 प्रतिशत लोगों की आय 1000 से 1500 रूपया प्रतिमाह थी और 50 प्रतिशत लोगों की 1500 से 2000 रुपया प्रतिमाह थी। सर्वेक्षण के समय किसी भी व्यक्ति की आय 2000 रुपये प्रतिमाह से अधिक नहीं थी। पाँच व्यक्ति वाले परिवारों के लिए इतनी आय कम ही कही जायेगी।

सारणी 7

उत्तरदाताओं की मासिक आय

क्र. सं.	आय प्रतिमाह (रुपया)	संख्या	प्रतिशत
1.	500 — 1000	5	16.7
2.	1000 — 1500	10	33.3
3.	1500 — 2000	15	50.0
4.	2000 से अधिक	—	—
योग		30	100.0

पारिवारिक व्यय (बजट)

पहले आदिवासियों में ''खाओ पिओ, मस्त रहो'' की रीति-नीति प्रचलित थी लेकिन विपणन और विज्ञापन के दौर के इस युग में परिवर्तन इनमें भी देखने को मिलता है जिसके कारण इन लोगों में भी अपने आय व्यय की पूर्व योजना मन में बनाये रखते हैं।

उत्तरदाताओं में 43.33 प्रतिशत लोग भोजन पर 50-100 रुपया, 30 प्रतिशत लोग 100-200 रुपये और 26.67 प्रतिशत लोग 200-500 रुपये प्रतिमास खर्च कर रहे थे। उत्तरदाताओं में 93.33 प्रतिशत लोग 50-100 रुपये कर रहे थे और शेष 6.67 प्रतिशत लोग 100-200 वस्त्र पर हर महीने खर्च कर रहे थे। उत्तरदाताओं में 93.33 प्रतिशत लोग शिक्षा पर कुछ भी नहीं खर्च कर रहे थे और 6.67 प्रतिशत लोग केवल 50-100 हर महीने खर्च कर रहे थे। उत्तरदाताओं में 96.67 प्रतिशत लोग मनोरंजन पर कुछ भी नहीं खर्च कर रहे थे और शेष 3.33 प्रतिशत लोग 50-100 रुपये हर महीने खर्च कर रहे थे। उत्तरदाताओं में 90.00 प्रतिशत लोग अन्य मदों में कुछ भी नहीं खर्च कर रहे थे, शेष 10.00 प्रतिशत लोग 50-100 रुपये प्रतिमाह खर्च कर रहे थे।

सारणी 8

उत्तरदाताओं का पारिवारिक व्यय (बजट)

क्र सं.	व्यय (रुपये में) मासिक	मद									
		भोजन		वस्त्र		शिक्षा		मनोरंजन		अन्य	
		सं.	प्रतिशत	सं.	प्रतिशत	सं.	प्रतिशत	सं.	प्रतिशत	सं.	प्रतिशत
1.	00 — 50	—	—	—	—	28	93.33	29	96.33	27	90
2.	50 — 100	13	43.33	28	93.33	2	6.67	1	3.33	3	10
3.	100 — 200	9	30.00	2	6.67	—	—	—	—	—	—
4.	200 — 500	8	26.67	—	—	—	—	—	—	—	—
5.	500 — 1000	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
योग		30	100	30	100	30	100	30	100	30	100

उद्योग धन्धे

सर्वेक्षण वाले गाँव से 2 कि० मी० दूर ''दीन दयाल **शोध संस्थान''** की ओर से ''उद्यमिता विद्यापीठ'' की स्थापना की गयी है जिसमें कुटीर उद्योग से कई प्रकार की खाद्य वस्तुएँ एवं अन्य सामग्री तैयार की जाती हैं। चूँकि यह क्षेत्र पहाड़ी एवं जंगली है, अतः इसमें कई प्रकार के पेड़-पौधे एवं जड़ी-बूटियाँ पायी जाती हैं। यहाँ के जंगलों में दूधी लकड़ी अधिक मात्रा में पायी जाती है, जिससे यहाँ पर लकड़ी के खिलौने का कुटीर उद्योग व्यापक रूप से फल-फूल रहा है। ये आदिवासी जंगल की लकड़ियाँ काट कर समीप के पर्यटक स्थल चित्रकूट कस्बे में बेचते भी हैं। इनका यह कार्य वर्ष भर चलता रहता है। गर्मी के मौसम में ये लोग तेंदू के पत्तों की तुड़ाई करते हैं। परन्तु इनको उचित मजदूरी नहीं मिलती। इसके अतिरिक्त ये शहद निकालते हैं जिसे बिचौलिये इनके गाँव जाकर अत्यधिक सस्ते दामों में खरीद लाते हैं। इसके अतिरिक्त यहाँ के लोग कृषि कार्य तथा इससे सम्बन्धित अन्य उद्योग भी करते हैं।

उत्तरदाताओं के रहन-सहन का स्तर : इस क्षेत्र में आदिवासियों के आवास ज्यादातर कच्चे एवं झोपड़ीनुमा पाये जाते हैं।

सारणी 9 : आवासीय दशाएं

क्र. सं.	आवास का स्वरूप	संख्या	प्रतिशत
1.	झोपड़ी	6	20.0
2.	कच्चा	23	76.7
3.	कच्चा एवं पक्का	1	3.3
4.	पक्का	0	0.0
	योग	30	100.0

उत्तरदाताओं में कच्चे मकान 76.7 प्रतिशत पाये गये। झोपड़ी में रहने वाले 20 प्रतिशत और कच्चे एवं पक्के मकान में रहने वाले 3.3 प्रतिशत आदिवासी थे। पक्का मकान किसी सदस्य के पास नहीं था।

सारणी 10 : आवासीय सुविधाओं की स्थिति

क्रं. सं.	आवासीय सुविधायें	हैं	नहीं	योग	प्रतिशत में		
					उपलब्ध	अनुपलब्ध	प्रतिशत में
1.	रसोई घर	1	29	30	3.3	96.7	100
2.	शौचालय	0	30	30	—	100	100
3.	पानी की व्यवस्था	27	3	30	90.0	10.0	100
4.	वातायन	3	27	30	10.0	90.0	100
5.	विद्युत	0	30	30	—	100	100

अधिकांश घरों में रसोई बनाने के लिए पृथक स्थान नहीं थे। शौचालय की सुविधा किसी भी उत्तरदाताओं के आवास में उपलब्ध नहीं थी। 90 प्रतिशत लोगों के यहाँ पानी की व्यवस्था सरकारी हैड पम्प एवं कुएं से थी और 10 प्रतिशत लोगों के यहाँ पानी की उचित व्यवस्था नहीं थी। 10 प्रतिशत मकान में वातायन की व्यवस्था थी। शेष 90 प्रतिशत मकानों में वातायन की व्यवस्था नहीं थी। चूँकि गाँव में विद्युतीकरण नहीं हुआ था इसलिए किसी भी मकान में विद्युत की सुविधा नहीं थी।

सारणी 11 : घर के पास का वातावरण (पर्यावरण)

क्र. सं.	वातावरण	संख्या	प्रतिशत
1.	अच्छा	3	10
2.	खराब	27	90
योग		30	100.0

90 प्रतिशत आवासों के आसपास गन्दगी की भरमार थी। शेष 10 प्रतिशत लोगों के आवास साफ-सुथरे देखने में लगे थे।

निष्कर्ष

उपर्युक्त सारणियों से स्पष्ट हो जाता है कि अधिकतर उत्तरदाता 35-40 वर्ष आयु के थे और सबसे कम उत्तरदाता 45 से 50 वर्ष आयु वर्ग के थे। आदिवासियों में बहुत कम लोग अविवाहित मिले और अधिकतर लोगों की शादी बाल्यावस्था में हो गई थी। इनमें विधवा विवाह की भी प्रथा है। आदिवासी जनजाति कोरकू की प्रशाखा ''मवइया'' में अधिकतर लोग अशिक्षित हैं और अशिक्षा के कारण प्रतिदिन कोई न कोई नयी समस्या उत्पन्न करते रहते हैं। इस जाति के अधिकतर लोग एकाकी परिवारों में जीवन व्यतीत कर रहे हैं जब कि मौखिक सूचना के अनुसार पहले अधिकतर लोग संयुक्त परिवार में बँधे थे। अधिकतर परिवारों में सदस्यों की संख्या 2 से 5 के बीच में थी। इन लोगों का प्रत्यक्ष एवं अप्रत्यक्ष रूप से वनों उपज और मजदूरी ही आय का मुख्य स्रोत है। अधिकतर लोगों की आय 1500 से 2000 रुपये के बीच में थी। 500 से 1000 रुपया प्रतिमाह आमदनी वालों की संख्या बहुत कम थी। ये लोग भोजन वस्त्र, शिक्षा, मनोरंजन और अन्य पर खर्च बहुत कम करते हैं क्योंकि आर्थिक स्थिति ठीक नहीं है। ज्यादातर लोगों के आवास कच्चे एवं झोपड़ीनुमा हैं। रसोईघर की सुविधा बहुत कम लोगों के यहाँ उपलब्ध है। आवास में शौचालय की सुविधा तो है ही नहीं। अधिकांश घरों के आस-पास गंदगी व्याप्त है। अभी इस गाँव में बिजली नहीं पहुँची। वे मिट्टी के तेल की ढिबरी से ही काम चलाते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

इस प्रपत्र की तैयारी में प्रो० श्री बी० डी० शुक्ला, बी० एच० यू० एवं श्री शैलेन्द्र कुमार मिश्र ने मार्गदर्शन किया जिसके लिए लेखक उनका ऋणी है।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 44, No. 4, October 2001.

समष्टि $F_{p,\mu}$ में गॉस हाइपरज्यामितीय फलन वाले भिन्नात्मक फलन आपरेटरों का अध्ययन

आर० के० कुम्भट तथा योगेश शर्मा
गणित तथा सांख्यिकी विभाग, जैनारायण व्यास विश्वविद्यालय, जोधपुर (राज०)

[प्राप्त – सितम्बर 15, 2000]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में मकब्राइड द्वारा विचारित समष्टि में अष्टि रूप में सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलन के भिन्नात्मक कलन के आपरेटरों का अध्ययन दिया गया है।

Abstract

A study of fractional calculus operator's involving Gauss hypergometric function on space $F_{p,\mu}$. *By* R. K. Kumbhat and Yogesh Sharma, Department of Mathematics & Statistics, Jai Narayan Vyas University, Jodhpur (Raj.).

The present paper deals with the study of operator's of fractional calculus of generalised hypergeometric function as a kernel in space considered by McBride.

प्रस्तावना

ग्लेस्के[2] ने समाकल रूपान्तर के गुणनखण्डन के लिए भिन्नात्मक कलन के चिरसम्मत आपरेटरों के महत्व की ओर इंगित किया। बैयर[1] ने सार्वीकृत फलन की मकब्राइड समष्टि $F^{1}_{p,\mu}$ में लाप्लास तथा स्टील्जे रूपान्तरों पर शोध करते हुए इन रूपान्तरों तथा भिन्नात्मक कलन के आपरेटरों के मध्य सम्बन्ध प्राप्त किया है।

इस प्रपत्र में C सर्वत्र संमिश्र संख्याओं के फील्ड का द्योतन करता है। $C^{\alpha}(R_{+})$ फलनों की समष्टि है जो R_{+} पर परिभाषित है। $C_{0}^{\alpha}(R_{+})$ फलनों की उपसमष्टि है $C^{\alpha}(R_{+})$ में। यदि कोई प्रतिबन्ध न दिये हों तो $\alpha, \beta, \eta, \nu, x, \lambda$ तथा μ यथेष्ट संमिश्र संख्याएँ हैं और p, q संख्याएँ हैं जो

$1 \leq p \leq \alpha$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ **जिससे कि** $p \to a$, q संगत है 1 के तथा व्युत्क्रम रूप से $q \to \alpha$ तथा p संगत है 1 के. **कार्लसन[10] तथा** एक्टन[4, 5], श्रीवास्तव तथा कश्यप[11] आदि ने इस तरह की समस्याओं पर विचार किया है।

2. समष्टि $f_{p,\mu}$ तथा उनके द्वैती

सदा की तरह माना कि $L^p(R_+)$, $1 \leq P\ \infty$ से R_+ पर माप्य तथा p वें घात के समाकलनीय फलन का बानाख समष्टि सूचित होता है जिसका मानक

$$\| \phi \|_p = \left(\int_0^\infty | \phi(x) |^p \, dx \right)^{1/p} \tag{2.1}$$

है तथा $L^\alpha(R_+) R_+$ पर अनिवार्यतः परिबद्ध फलन का बानाख समष्टि है जिसका मानक है—

$$\| \phi \|_\infty = \underset{x \in R}{ess\ \sup} | \phi(x) | \tag{2.2}$$

यदि $\mu \in C$ जहाँ C संमिश्र संख्याओं का फील्ड है और $1 \leq p \leq \infty$ तो L^p_μ फलन $\phi(x)$ का बानाख समष्टि है जिससे कि $x^{-\mu} \phi(x) \in L^p(R_+)$ जिसका मानक है–

$$\| \phi \|_{p,\mu} = \| x^{-\mu} \phi(x) \|_p \tag{2.3}$$

मकब्राइड द्वारा प्रचारित परीक्षण फलन के समष्टि को निम्नवत् परिभाषित किया जाता है।

परिभाषा 2.1 $1 \leq p \leq \infty$ के लिए, माना कि

$$F_{P,0} = \left\{ \phi : \phi \in C^\infty(R_+) ; x^k \frac{d^k \phi}{dx^k} \in L^p(R_+) ; k \in N_0 \right\}$$

तथा

$$F_{\infty,0} = \left\{ \phi : \phi \in C^\infty(R_+) ; x^k \frac{d^k \phi}{dx^k} \to 0 \text{ ज्यों ज्यों } x \to 0 \text{ तथा ज्यों ज्यों } x \to \infty ; k \in N_0 \right\}$$

$1 \leq P < \infty$ तथा $\mu \in C$, के लिए। माना कि

$$F_{P,\mu} = \left\{ \phi : \varphi \in C^\infty(R_+) ; x^{-\mu} \phi \in F_{P,0} \right\}$$

समष्टि अर्ध-मानकों $\gamma_k^{p,\mu}$, $k \in N_0$ के तन्त्र से युक्त समष्टि $F_{p,n}$ जिसे

$$\gamma_k^{p,\mu}(\phi) = \left|\left| x^k \frac{d^k}{dx^k}\left(x^{-\mu}\phi x\right)\right|\right|_p \tag{2.4}$$

द्वारा परिभाषित किया जाता है, उसे संमिश्र बहुमानकित समष्टि के रूप में सिद्ध किया जा सकता है। मकब्राइड[8] से पता चलता है कि

प्रमेयिका 2.1 : यदि $\phi \in F_{p,\mu}$ तो $x^{1/p-\mathrm{Re}\,\mu}\phi(x)R_+$ में परिबद्ध है।

प्रमेयिका 2.2 : $C_0^{\alpha}(R_+)$ सघन L_μ^p तथा $F_{p,\mu}$ में है।

हम $F_{p,\mu}$ पर कुछ आपरेटरों पर यानी आपरेटर $x^\lambda(\lambda \in C)$ एवं D पर विचार करें जिन्हें

$$\left(x^\lambda \phi\right)(x) = x^\lambda \phi(x) \tag{2.5}$$

$$D\phi(x) = \frac{d\phi(x)}{dx} \tag{2.6}$$

द्वारा परिभाषित किया जाता है। मकब्राइड[8] का अनुसरण करते हुए हम इन आपरेटरों के निम्नांकित प्रतिचित्रण गुणों का वर्णन करते हैं।

प्रमेयिका 2.3 : (I) आपरेटर $x^\lambda F_{p,\mu}$ का $F_{p,\mu+\lambda}$ तक समप्रायरूपता जिसमें व्युत्क्रम आपरेटर $x^{-\lambda}$ हैं।

(II) आपरेटर $D\,F_{p,\mu}$ से $F_{p,\mu-1}$ तक संतत रैखिक प्रतिचित्रण है और इसकी समप्रायरूपता $\mathrm{Re}\,\mu \neq 1/p$ D को $F_{p,\mu-1}$ पर व्युत्क्रम D^{-1} है जिसका मानक है —

$$\left(D^{-1}\psi\right)(x) = \begin{cases} \int_0^x \psi(t)\,dt, \mathrm{Re}\,\mu > 1/p \\ \\ -\int_x^\infty \psi(t)\,dt, \mathrm{Re}\,\mu < 1/p \end{cases} \quad \psi \in F_{p,\mu-1} \tag{2.7}$$

3. भिन्नात्मक आपरेटर

हम सर्वीकृत भिन्नात्मक समाकल आपरेटरों को प्रविष्ट करेंगे जिन्हें सक्सेना[12] के द्वारा परिभाषित किया गया है।

परिभाषा 3.1 : माना कि α β η संमिश्र संख्याएँ जिनमें $\text{Re}(1-\alpha) > m$ तो

$$I_m^{\alpha,\beta,\eta} f = I_m^{\alpha,\beta,\eta} f(x)$$

$$= \frac{x^{-\eta-1}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x F\left(\alpha,\ \beta+m;\ \beta;\ \frac{t}{x}\right) t^{\eta} f(t)\,dt,\ \text{Re}(\eta) > -q^{-1} \tag{3.1}$$

$$I_m^{\alpha,\beta,\eta} f = I_m^{\alpha,\beta,\eta} f(x)$$

$$= \frac{x^{\eta}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^{\infty} F\left(\alpha,\ \beta+m;\ \beta;\ \frac{x}{t}\right) t^{-\eta-1} f(t)\,dt,\ \text{Re}(\eta) > -p^{-1} \tag{3.2}$$

क्योंकि $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $\beta \neq 0, -1, -2, \ldots$, $m = 0, 1, 2, \ldots$,। यदि हम $m = 0$ लें तो आपरेटर $I_m^{\alpha,\beta,\eta}$ तथा $J_m^{\alpha,\beta,\eta}$ में भिन्नात्मक समाकल समाविष्ट हो जाते हैं। हम रीमान-लुइविले, वेली तथा एर्डेल्यी-कोबर के आपरेटर दे रहे हैं[6 p. 193]

$$R^{\alpha} f = x^{1-\alpha} I_0^{\alpha,\alpha,0} f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} f(t)\,dt \tag{3.3}$$

(रीमान लुइविले)

$$W^{\alpha} f = J_0^{\alpha,\alpha,0} x^{1-\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (t-x)^{-\alpha} f(t)\,dt \tag{3.4}$$

(वेली)

$$E^{\alpha,\eta} f = I_0^{\alpha,\beta,\eta} f = \frac{x^{-\eta+\alpha-1}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x t^{\eta} (x-t)^{-\alpha} f(t)\,dt \tag{3.5}$$

(एर्डेल्यी-कोबर)

$$K^{\alpha,\eta} f = J_0^{\alpha,\beta,\eta} f = \frac{x^{\eta}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^{\infty} t^{-\eta+\alpha-1} (t-x)^{-\alpha} f(t)\,dt \tag{3.6}$$

(एर्डेल्यी-कोबर)

4. $F_{p,\mu}$ में भिन्नात्मक कलन

अब हम समष्टि $F_{p,\mu}$ में भिन्नात्मक समाकलों (3.1) तथा (3.2) की संक्रिया करेंगे।

प्रमेय 4.1 यदि $\text{Re}(1-\alpha) > m$ तथा $\text{Re}\,\mu > \max(0, \text{Re}(\alpha+m)) + p^{-1} - 1$ तो

$$I_m^{\alpha+1, \beta, \alpha}\phi = \frac{d}{dx}\left\{x I_m^{\alpha, \beta, \alpha}\phi\right\}, \ \phi \in F_{p,\mu} \tag{4.1}$$

उपपत्ति : भिन्नात्मक समाकलों की परिभाषा से

$$\frac{d}{dx}\left\{x I_m^{\alpha, \beta, \alpha}\phi\right\} = \frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\alpha} {}_2F_1\left(\alpha, \beta+m; \beta; \frac{t}{x}\right)\phi(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x \frac{d}{dx}\left(\frac{t}{x}\right)^{\alpha} {}_2F_1\left(\alpha, \beta+m; \beta; \frac{t}{x}\right)\phi(t)\, dt$$

निम्नांकित सूत्र का प्रयोग करने पर

$$\frac{d}{dz}\left\{z^{\delta}\ {}_2F_1\,\alpha, \beta; \gamma; z)\right\} = (\delta)\, z^{\delta-1}\ {}_3F_2\left[\begin{matrix}\delta+1, \alpha, \beta \\ \delta, \gamma\end{matrix}\ \middle|\ z\right]$$

हमें ज्ञात होता है

$$= \frac{(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x t^{\alpha} x^{-\alpha-1}\ {}_2F_1\left(\alpha+1, \beta+m; \beta; \frac{t}{x}\right)\phi(t)\, dt$$

$$= \frac{x^{-\alpha-1}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x t^{\alpha}\ {}_2F_1\left(\alpha+1, \beta+m; \beta; \frac{t}{x}\right)\phi(t)\, dt$$

$$\therefore \qquad \frac{d}{dx}\left\{x I_m^{\alpha, \beta, \alpha}\phi(x)\right\} = I_m^{\alpha+1, \beta, \alpha}\phi(x)$$

प्रमेय 4.2 : यदि $\text{Re}(1-\alpha) > m$ तथा $\text{Re}\,\mu < \min(\text{Re}(\alpha-\beta), \text{Re}-(\beta+m)) + 1/p$ तो

$$J_m^{\alpha+1, \beta, \alpha-1}\phi = -\frac{d}{dx}\left\{t J_m^{\alpha, \beta, \alpha}\phi\right\}, \ \phi \in F_{p,\mu} \tag{4.2}$$

यदि δ अवकल आपरेटर हो तो $\partial = x^d/dx$ तब

प्रमेयिका 4.1 यदि $\text{Re}(1-\alpha) > m$ तो $\phi \in F_{p,\mu}$ के लिये

$$\partial\left(I_n^{\alpha, \beta, \eta}\phi\right) = I_m^{\alpha, \beta, \eta}\partial\phi$$

यदि

$$\text{Re}\,\mu > \max\{0, \text{Re}(\alpha+m)\} + \frac{1}{p} - 1 \tag{4.3}$$

उपपत्ति : निम्नांकित सम्बन्ध का प्रयोग करने पर

$$I_m^{\alpha,\beta,\eta}\phi = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t z^{\eta} F(\alpha,\ \beta+m;\ \beta;\ z)\,\phi(xz)\,dz$$

$$x\frac{d}{dx}I_m^{\alpha,\beta,\eta}\phi = x\frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t z^{\eta} F(\alpha,\ \beta+m;\ \beta;\ z)\,\phi(xz)\,dz$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t x z^{\eta} F(\alpha,\ \beta+m;\ \beta;\ z)\frac{d}{dx}\phi(xz)\,dz$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t z^{\eta} F(\alpha,\ \beta+m;\ \beta;\ z)\,x\frac{d}{dx}\phi(xz)\,dz$$

$$\partial\left(I_m^{\alpha,\beta,\eta}\phi\right) = I_m^{\alpha,\beta,\eta}\partial\phi$$

प्रमेयिका 4.2 : यदि $\mathrm{Re}(1-\alpha) > m$ तथा $\mathrm{Re}\,\mu < \min(\mathrm{Re}(\alpha-\beta),\ (\beta+m)) + 1/p$ तो $\phi \in F_{p,\mu}$ के लिए

$$\partial\left(I_m^{\alpha,\beta,\eta}\phi\right) = -J_m^{\alpha,\beta,\eta}\partial\phi \qquad (4.4)$$

प्रमेय 4.3 : यदि $\mathrm{Re}(1-\alpha) > m$ तथा $\mathrm{Re}\,\mu > \max(0, \mathrm{Re}(\alpha+m)) + p^{-1} - 1$ तो $\phi \in F_{p,\mu}$ के लिए

$$I_m^{\alpha+1,\beta,\alpha}\phi = I_m^{\alpha,\beta,\alpha}\phi + I_m^{\alpha,\beta,\alpha}\partial\phi \qquad (4.5)$$

$$I_m^{\alpha+1,\beta,\alpha}\phi = I_{m-1}^{\alpha,\beta,\alpha}\phi + I_m^{\alpha,\beta,\alpha+1}\phi + \frac{(\alpha-\beta)}{\beta}I_m^{\alpha,\beta,\alpha+1}\phi + I_m^{\alpha,\beta,\alpha}\partial\phi \qquad (4.6)$$

$$I_m^{\alpha+1,\beta,\alpha}\phi = (1-\alpha)\,I_m^{\alpha-1,\beta,\alpha}\phi + \frac{(\alpha-\beta-m)}{\beta}I_{m-1}^{\alpha,\beta+1,\alpha+1}\phi + I_m^{\alpha,\beta,\alpha}\partial\phi \qquad (4.7)$$

$$I_m^{\alpha+1,\beta,\alpha}\phi = (1-\alpha)\, I_m^{\alpha+1,\beta,\alpha}\phi + \frac{(\alpha+m)}{\beta} I_{m-1}^{\alpha,\beta+1,\alpha+1}\phi + I_m^{\alpha,\beta,\alpha}\partial\phi \tag{4.8}$$

उपपत्ति : चूँकि सम्बन्ध (4.3) तथा (4.1) से तात्पर्य है —

$$I_m^{\alpha+1,\beta,\alpha}\phi = \frac{d}{dx}\left(I_m^{\alpha,\beta,\alpha}\phi\right)$$

$$I_m^{\alpha+1,\beta,\alpha}\phi = I_m^{\alpha,\beta,\alpha}\phi + I_m^{\alpha,\beta,\alpha}\partial\phi$$

यदि हम मैगस[7] से गॉस हाइपरज्यामितीय फलन के संलग्न सम्बन्ध पर ध्यान दें

$$cF(a, b-1; c; z) - c(1-z)\, F(a, b; c; z) + (a-c)\, zF(a, b; c+1; z) = 0$$

तो हमें प्राप्त होता है

$$\beta F\left(\alpha, \beta+m-1, \beta, \frac{t}{x}\right) - \left(1-\frac{t}{x}\right) F\left(\alpha, \beta+m, \beta, \frac{t}{x}\right)$$

$$+ (\alpha-\beta)\frac{t}{x} F\left(\alpha, \beta+m, \beta+1, \frac{t}{x}\right) = 0$$

$x^{-\eta-1}\dfrac{t^{\eta}\phi(t)}{\Gamma(1-\alpha)}$ **से गुणा करने तथा अन्तराल (0, x) में t के द्वारा समाकलित करने पर**

$$\beta I_{m-1}^{\alpha,\beta,\eta}\phi - \beta I_m^{\alpha,\beta,\eta}\phi + \beta I_{m-1}^{\alpha,\beta,\eta+1}\phi + (\alpha-\beta)\, I_{m-1}^{\alpha,\beta,\eta+1}\phi = 0$$

जिससे हम पाते हैं कि (4.5) का अर्थ (4.6) है। सम्बन्ध (4.7) तथा (4.8) को भी मैगस के संलग्न सम्बन्धों के बल पर प्राप्त किया जाता है जो क्रमशः

$$cF(a, b-1; c; z) - cF(a-1, b; c; z) + (a-b)\, zF(a, b; c+1; z) = 0$$

तथा

$$cF(a, b; c; z) - cF(a-1, b; c; z) - bzF(a-b)\, zF(a, b+1; c+1; z) = 0$$

प्रमेय 4.4 : यदि $\text{Re}(1-\alpha) > m$ तथा $\text{Re}\,\mu < \min(\text{Re}(\alpha-\beta), \text{Re}(\beta+m)) + 1/p$ तो $\phi \in F_{p,\mu}$ के लिए

$$J_m^{\alpha+1,\beta,\alpha-1}\phi = \frac{t}{x} J_m^{\alpha,\beta,\alpha}\partial\phi \tag{4.9}$$

$$J_m^{\alpha+1,\beta,\alpha-1}\phi = -J_m^{\alpha+1,\beta,\alpha-2}\phi - \frac{(\alpha-\beta+1)}{\beta}J_m^{\alpha+1,\beta,\alpha-2}\phi + \frac{t}{x}J_{m+1}^{\alpha,\beta,\alpha}\partial\phi \tag{4.10}$$

$$J_m^{\alpha+1,\beta,\alpha-1}\phi = -\frac{(\beta-1)}{\alpha+\beta-m}J_m^{\alpha+1,\beta,\alpha-2}\phi + \frac{(2-\alpha)t(\beta-1)}{x(\alpha+\beta-m)}J_{m+1}^{\alpha-1,\beta-1,\alpha-1}\partial\phi \tag{4.11}$$

$$J_m^{\alpha+1,\beta,\alpha-1}\phi = \frac{(\alpha-1)(\beta-1)(2-\alpha)}{(\beta+m)}J_m^{\alpha+1,\beta,\alpha-2}\phi + \frac{t}{x}\frac{(\beta-1)(2-\alpha)}{(\beta+m)}J_m^{\alpha-1,\beta-1,\alpha-1}\partial\phi \tag{4.12}$$

5. भिन्नात्मक कलन के आपरेटरों का $F_{p,\mu}$ पर सातत्य

भिन्नात्मक कलन के हमारे आपरेटरों के सातत्य पर विचार करते समय निम्नलिखित परिगणना में मकब्राइड[8] द्वारा ज्ञात रीमान-लेइविले तथा वेली के लिए अगली दो प्रमेयिकाएँ उपयोगी होंगी।

प्रमेयिका 5.1 : माना कि α, β कोई संमिश्र संख्या है तब

$$R^{1-\alpha}R^{1-\beta}\phi = R^{1-\beta}R^{1-\alpha}\phi = R^{1-(\alpha+\beta)}\phi \tag{5.1}$$

(प्रथम सूचकांक नियम)

क्योंकि $\phi \in F_{p,\mu}$ बशर्ते कि $\text{Re}\,\mu > \max(0, \text{Re}(\alpha-1), \text{Re}(\beta-1)) + 1/p - 1$ तथा

$$R^{1-\beta}x^{\alpha+\nu}\phi = R^{\nu+1}x^{-\beta}R^{\alpha+1}\phi \tag{5.2}$$

(द्वितीय सूचकांक नियम)

क्योंकि $\phi \in F_{p,\mu}$ बशर्ते $\alpha+\beta+\nu=0$ तथा $\text{Re}\,\mu > \max(0, \text{Re}(\nu+1)), + 1/p - 1$

प्रमेयिका 5.2 : माना कि α तथा β कोई संमिश्र संख्याएँ हैं, तो

$$W^{1-\alpha}W^{1-\beta}\phi = W^{1-\beta}W^{1-\alpha}\phi = W^{1-(\alpha+\beta)}\phi \tag{5.3}$$

(प्रथम सूचकांक नियम)

क्योंकि $\phi \in F_{p,\mu}$ बशर्ते

$$\text{Re}\,\mu < \max(\text{Re}(\alpha+1),\ \text{Re}(\beta+1),\ \text{Re}(\alpha-1+\beta+1)) + 1/p$$

तथा

$$W^{1-\beta} x^{\alpha+\nu} \phi = W^{\nu+1} x^{-\beta} W^{\alpha+1} \phi \tag{5.4}$$

(द्वितीय सूचकांक नियम)

क्योंकि $\phi \in F_{p,\mu}$ बशर्ते कि $\text{Re}\,\mu < \min(0, \text{Re}(\alpha-1)), + 1/p$ तथा $\alpha + \beta + \nu = 0$

प्रमेयिका 5.3 : माना कि γ कोई संमिश्र संख्या है यदि $Re.\,\mu > \max(0, \text{Re}(\alpha + m)) + 1/p - 1$ तो आपरेटर $I_m^{\alpha, 1-\alpha, -\alpha}$ को $\phi \in F_{p,\mu}$ के लिए एर्डेल्यी-कोबर आपरेटर में विघटित किया जा सकता है

$$I_m^{\alpha, 1-\alpha, -\alpha} \phi(w-x) = x^{-\gamma-\alpha} E^{1-\alpha, -\alpha-m-\gamma} E^{2\alpha, -\gamma} x^{\gamma} \phi \tag{5.5}$$

$$I_m^{\alpha, 1-\alpha, -\alpha} \phi(w-x) = x^{m-\gamma+\alpha} E^{1-\alpha, -\gamma} E^{2\alpha, \alpha+m-\gamma} x^{\gamma-m+\alpha} \phi \tag{5.6}$$

उपपत्ति : हम केवल सूत्र (5.5) को सिद्ध करेंगे क्योंकि (5.6) की पुष्टि इसी प्रकार से की जा सकती है। यदि $\text{Re}\,\alpha > 0$

$$x^{-\gamma} E^{1-\alpha, \alpha+m-\gamma} E^{2\alpha, -\gamma} x^{\gamma} \phi$$

$$= \frac{x^{m-\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-2\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\alpha-m-1} \int_0^t (t-u)^{-2\alpha} \phi(u)\, du\, dt$$

$$= \frac{x^{m-\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-2\alpha)} \int_0^x \phi(u) \int_0^t t^{\alpha-m-1} (x-t)^{\alpha-1} (t-u)^{-2\alpha}\, du\, dt$$

$$= \frac{x^{-1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-2\alpha)} \int_0^x \phi(u)(x-u)^{-\alpha} \int_0^1 \nu^{\alpha-1}(1-\nu)^{-2\alpha} \times \left[1 - \left(1 - \frac{u}{x}\right)\nu\right]^{\alpha-m-1} du\, d\nu$$

गॉस हाइपरज्यामितीय फलन के समाकल निरूपण का प्रयोग करने पर

$$= \frac{x^{-1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-u)^{-\alpha} F\left(\alpha, 1-\alpha+m; 1-\alpha; 1-\frac{u}{x}\right) \phi(u)\, du$$

$$= I_m^{\alpha, 1-\alpha, -\alpha} \phi(w-x)$$

प्रमेयिका 5.4 : यदि $\text{Re}\,\mu < \min\{\text{Re}(\alpha+\beta), \text{Re}-(\beta+m)\} + 1/p$ तो आपरेटर $J_m^{\alpha, 1-\alpha, -\alpha}$ को $\phi \in F_{p,\mu}$ के लिए एर्डेल्यी-कोबर आपरेटर में विघटित किया जा सकता है।

$$I_m^{\alpha, 1-\alpha, -\alpha} \phi(x-w) = x^{-\beta} K^{2\alpha, \beta} K^{1-\alpha+\alpha-m+\beta} x^{\beta-1} \phi \tag{5.7}$$

$$= x^{\gamma} k^{2\alpha, -\gamma} K^{1-\alpha, -(\alpha+m+\gamma)} x^{-\gamma} \phi \tag{5.8}$$

प्रमेयिका 5.5 : यदि $\text{Re}\,\mu > \max(0, \text{Re}(\alpha+m)), + 1/p - 1$ तो $\phi \in F_{p,\mu}$ के लिए निम्न सम्बन्ध सत्य हैं

$$I_m^{\alpha, \beta, \eta} \phi = \left[\frac{(\alpha-\beta)(1-\alpha) I_m^{\alpha-1, \beta, \eta-1} \phi - m I_{m-1}^{\alpha, \beta, \eta-1} \phi}{(\beta+m-\alpha)}\right] + I_m^{\alpha, \beta, \eta-1} \phi \tag{5.9}$$

$$I_m^{\alpha, \beta, \eta} \phi = \frac{(\beta+m) I_{m-1}^{\alpha, \beta, \eta} \phi + I_m^{\alpha+1, \beta, \eta} \phi}{(\beta+m-\alpha)} \tag{5.10}$$

$$I_m^{\alpha, \beta, \eta} \phi = (1-\alpha) I_m^{\alpha-1, \beta, \eta} \phi + \frac{(\beta+m)}{\beta} I_m^{\alpha, \beta+1, \eta+1} \tag{5.11}$$

$$I_m^{\alpha, \beta, \eta} \phi = \frac{(\beta+m-\alpha-1)}{(\alpha)(\alpha-\beta+1)} \left[I_m^{\alpha+1, \beta, \eta} \phi - I_m^{\alpha+1, \beta, \eta+1} \phi\right] \times \frac{-m I_{m-1}^{\alpha+1, \beta, \eta} \phi}{\alpha(\alpha-\beta+1)} \tag{5.12}$$

उपपत्ति : गॉस हाइपरज्यामितीय फलन[7] के लिए संलग्न सम्बन्ध

$$(a-c) F(a-1, b; c; z) + (c-b) F(a, b-1; c; z) + (b-a)(1-z) F(a, b; c; z) = 0$$

से हमें

$$(\alpha - \beta) F\left(\alpha - 1,\ \beta + m\,;\ \beta,\ \frac{t}{x}\right) - mF\left(\alpha,\ \beta + m + 1;\ \beta;\ \frac{t}{x}\right)$$

$$+ (\beta + m - \alpha)\left(1 - \frac{t}{x}\right) F\left(\alpha,\ \beta + m;\ \beta;\ \frac{t}{x}\right) = 0$$

$$(\alpha - \beta)(1 - \alpha) I_m^{\alpha - 1, \beta, \eta - 1} \phi - m I_{m-1}^{\alpha, \beta, \eta - 1} \phi\, (\beta + m - \alpha) I_m^{\alpha, \beta, \eta - 1} \phi$$

$$= (\beta + m - \alpha) I_m^{\alpha, \beta, \eta} \phi$$

प्राप्त होता है। हमें ज्ञात है कि

$$I_m^{\alpha, \beta, \eta} \phi = \left[\frac{(\alpha - \beta)(1 - \alpha) I_m^{\alpha - 1, \beta, \eta - 1} \phi - m I_m^{\alpha, \beta, \eta - 1} \phi}{(\beta + m - \alpha)}\right] + I_m^{\alpha, \beta, \eta - 1} \phi$$

तो हमें $\text{Re}(1 - \alpha) > 0$ के लिए सम्बन्ध (5.9) मिलता है। सम्बन्ध (5.10) तथा (5.11) के भिन्न सूत्र—

$$(b - a) F(a, b\,; c\,; z) + aF(a + 1, b\,; c\,; z) - bF(a, b + 1; c\,; z) = 0$$

द्वारा भी सिद्ध किया जा सकता है क्योंकि $\text{Re}(1 - \alpha) > 0$ तथा सूत्र

$$c\,F(a - 1, b\,; c\,; z) - c\,F(a, b\,; c\,; z) + b\,zF(a, b + 1; c + 1; z) = 0$$

क्योंकि $\text{Re}(1 - \alpha) \le 0$ सम्बन्ध (5.12) को (5.9) में η के स्थान पर $\eta + 1$ तथा α के स्थान पर रखने से प्राप्त होता है।

प्रमेयिका 5.6 : यदि $\text{Re}\,\mu < \min(\text{Re}(\alpha - \beta),\ \text{Re} - (\beta + m)) + 1/p,\ \phi \in F_{p,\mu}$ तो सम्बन्ध

$$J_m^{\alpha, \beta, \eta} \phi = \frac{(\alpha - \beta)(1 - \alpha) J_{m-1}^{\alpha - 1, \beta, \eta - 1} \phi - m J_{m-1}^{\alpha, \beta, \eta - 1} \phi + (\beta + m - \alpha) J_m^{\alpha, \beta, \eta - 1} \phi}{(\beta + m - \alpha)} \tag{5.13}$$

$$J_m^{\alpha, \beta, \eta} \phi = \frac{J_m^{\alpha + 1, \beta, \eta} \phi + (\beta + m)\, J_m^{\alpha, \beta, \eta} \phi}{(\beta + m - \alpha)} \tag{5.14}$$

$$J_m^{\alpha, \beta, \eta} \phi = (1 - \alpha) I_m^{\alpha - 1, \beta, \eta} \phi + \frac{(\beta + m)}{\beta} I_m^{\alpha, \beta + 1, \eta + 1} \phi \tag{5.15}$$

$$J_m^{\alpha,\beta,\eta}\phi = \frac{-(\beta+m-\alpha-1)J_m^{\alpha+1,\beta,\eta+1}\phi - mJ_{m-1}^{\alpha+1,\beta,\eta}\phi + (\beta+m-\alpha-1)J_m^{\alpha+1,\beta,\eta}\phi}{(\alpha-\beta+1)(\alpha)} \tag{5.16}$$

प्राप्त होते हैं।

6. $F_{p,\mu}$ पर भिन्नात्मक कलन के आपरेटरों की समरूपता तथा सूचकांक

हम $F_{p,\mu}$ पर भिन्नात्मक कलन के आपरेटरों की अदर्शिता पर विचार करेंगे। सर्वप्रथम हम तत्समक आपरेटरों को लेते हैं।

प्रमेय 6.1 : $\phi \in F_{p,\mu}$ के लिए निम्नांकित समीकरण सत्य हैं —

$$I_m^{1,\beta,0}\phi = \phi(x) - \frac{(\beta+m)}{\beta} x^{-2} \int_0^x t\,\phi(t)\,F\left(1,\ \beta+m+1;\ \beta+1;\ \frac{x}{t}\right) dt \tag{6.1}$$

यदि

$$\operatorname{Re}\mu > \max(0, \operatorname{Re}(\alpha+m)) + \frac{1}{p} - 1$$

$$J_m^{1,\beta,-1}\phi = -\phi(x) + \frac{(\beta+m)}{\beta} x \int_0^x t^{-2}\phi(t)\,F\left(1,\ \beta+m+1;\ \beta+1;\ \frac{x}{t}\right) dt \tag{6.2}$$

यदि

$$\operatorname{Re}\mu < \min(\operatorname{Re}(\alpha-\beta), \operatorname{Re}-(\beta+m)) + \frac{1}{p}$$

उपपत्ति : (4.1) तथा (4.3) से

$$I_m^{1,\beta,0}\phi = \frac{d}{dx}\left(x I_m^{0,\beta,0}\phi\right)$$

$$I_m^{1,\beta,0}\phi = I_m^{0,\beta,0}\phi + I_m^{0,\beta,0}\delta\phi$$

$$= x^{-1}\int_0^x \frac{d}{dt}[\phi(t)\,t]\,F\left(0,\ \beta+m;\ \beta;\ \frac{t}{x}\right)$$

$$= x^{-1}\left[t\,\phi(t)\,F\left(0,\ \beta+m;\ \beta;\ \frac{t}{x}\right)\right]_0^x$$

$$-x^{-1}\int_0^x t\,\phi(t)\,\frac{d}{dt}F\left(0,\ \beta+m;\ \beta;\ \frac{t}{x}\right)dt$$

$$=x^{-1}\left[x\,\phi(x)\,F\left(0,\ \beta+m;\ \beta;\ \frac{t}{x}\right)\right]$$

$$-x^{-1}\int_0^x \frac{t\,\phi(t)(\beta+m)}{\beta}F\left(1,\ \beta+m+1;\ \beta+1;\ \frac{t}{x}\right)dt$$

अब निम्नांकित सूत्र

$$\frac{d}{dz}F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)=\frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\ \beta+1;\ \gamma+1;\ z)$$

$$=\phi(x)\,F(0,\ \beta+m,\ \beta,\ 1)-x^{-2}\,\frac{(\beta+m)}{\beta}\int_0^x t\,\phi(t)\,F\left(1,\ \beta+m+1;\ \beta+1;\ \frac{t}{x}\right)dt$$

का उपयोग करने पर हमें सम्बन्ध (6.1) प्राप्त होता है। सूत्र (6.2) को इसी तरह से (4.2) एवं (4.4) समीकरणों का उपयोग करते हुए प्राप्त कर सकते हैं।

प्रमेय 6.2 : $\phi\in F_{p,\mu}$ के लिए निम्नांकित तीन सूत्र सत्य होंगे यदि $\operatorname{Re}\mu>\max(0,\ \operatorname{Re}(x-1),\ \operatorname{Re}(2+x))+1/p-1$ तो

$$(\beta+x+1)\,x^{-2x-1}\,I_m^{-\beta,\beta+1,\beta}\,x^{2x+1}\,I_{m-x-1}^{-x,x+1,x}\,\phi(w-x)$$

$$=I_{m-x-1}^{-(\beta+x),\beta+x+2,\beta+x+1}\,\phi(w-t) \qquad (6.3)$$

यदि $\operatorname{Re}\mu>\max(0,\ \operatorname{Re}(x+1),\operatorname{Re}(-1+x+2))+1/p-1$ तो

$$(\beta+x+1)\,x^{-2x-1}\,I_{-2\beta-x-1}^{-\beta,\beta+1,\beta}\,x^{2x+1}\,I_{-3x-2-3\beta}^{-x,x+1,x}\,\phi(w-x)$$

$$=I_{-2\beta-2x-2}^{-(\beta+x),\beta+x+2,\beta+x+1}\,\phi(w-t) \qquad (6.4)$$

यदि $\operatorname{Re}\mu>\max(0,\ \operatorname{Re}(-\beta),\operatorname{Re}(\beta-1))+1/p-1$ तो

$$(\beta+x+1)\,x^{2\beta-2}\,I_{m-x+2-2\beta}^{-\beta+1,\beta,\beta}\,x^{-2\beta+1}\,I_m^{-x+1,x,x}\,\phi(w-x)$$

$$=I_{m-2\beta+2}^{-(\beta+x)+2,\beta+x,\beta+x-1}\,x^{-1}\,\phi(w-t) \qquad (6.5)$$

उपपत्ति : (a) (6.3) एवं (6.4) सूत्रों को सैगो[9] के सूत्रों

$$F(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(c-\lambda)}\int_0^t v^{\lambda-1}(1-v)^{(c-\lambda-1)}(1-vz)^{-a^1}$$

$$\times F\left(a-a^1,b;\lambda;vz\right)F\left(a^1,b-\lambda;c-\lambda;\frac{z(1-v)}{1-vz}\right)dv$$

तथा

$$F(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(c-\lambda)}\int_0^t v^{\lambda-1}(1-v)^{(c-\lambda-1)}(1-vz)^{r-a-b}$$

$$\times F\left(r-a,\ r-b;\ \lambda;\ vz\right)\ F\left(a+b-r;\ r-\lambda;\ c-\lambda;\ \frac{z(1-v)}{1-vz}\right)dv$$

का क्रमशः प्रयोग करके प्राप्त करते हैं। सूत्र (6.5) को निम्नवत् प्राप्त किया जा सकता है।

$$x^{2\beta-2}_{x(\beta+x-1)}\ I^{-\beta+1,\beta,\beta-1}_{m-x+2-2\beta}\ x^{-2\beta+1}\ I^{-x+1,x,x-1}_{m}\ \phi(w-x)$$

$$=\frac{x^{-\beta-2}(\beta+x-t)}{\Gamma(\beta)\Gamma(x)}\int_0^x (x-t)^{\beta-1}F\left(-\beta+1,m-x-\beta+2,\beta,1-\frac{t}{x}\right)t^{-x}$$

$$\times\int_0^t (t-u)^{x-1}F\left(-x+1,x+m,x,1-\frac{u}{t}\right)\phi(u)\,du\,dt$$

$$=\frac{x^{-\beta-2}(\beta+x-t)}{\Gamma(\beta)\Gamma(x)}\int_0^x \phi(u)\int_0^x t^{-x-2\beta+1}(x-t)^{\beta-1}(t-u)^{x-1}$$

$$\times\ F\left(-\beta+1,m-x-\beta+2;\beta;1-\frac{t}{x}\right)\ F\left(-x+1,x+m;x;1-\frac{u}{t}\right)du\,dt$$

$$=\frac{x^{-\beta-x}(\beta+x-1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(x)}\int_0^x \phi(u)(x-u)^{\beta+x-1}\left(\frac{u}{x}\right)u^{-1}$$

$$\int_o^1 v^{\beta-1}(1-v)^{x-1}\left[1-\left(1-\frac{u}{x}\right)v\right]^{-x-2\beta+1}$$

$$\times\ F\left(-\beta+1,-x+m-\beta+2;\ \beta;\left(1-\frac{u}{x}\right)v\right)$$

$$F\left(-x+1,\ x+m,\ x,\ \frac{\left(1-\frac{u}{x}\right)(1-\nu)}{1-\left(1-\frac{u}{x}\right)\nu}\right)du\,d\nu$$

$$=\frac{x^{-\beta-x}(\beta+x-1)}{\Gamma(\beta+x)}\int_0^x \phi(u)\,(x-u)^{\beta+x-1}\,u^{-1}$$

$$\times F\left(-\beta-x+2, x+m-\beta+2, \beta+x, 1-\frac{u}{x}\right)du$$

$$= I_{m-2\beta+2}^{-\beta-x+2,\,\beta+x,\,\beta+x-1}\, x^{-1}\,\phi(w-t)$$

हम सूत्र (सैगो) (9- o. 42) (3.10) का प्रयोग करते हैं

$$F(a,b\,;c\,;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(c-\lambda)}\,(1-z)^{-a+a^1+\lambda}\int_0^1 \nu^{\lambda-1}(1-\nu)^{(c-\lambda-1)}$$

$$\times\,(1-\nu)^{a-a^1-c}\,F\left(a-a^1,\ b-c+a^1+\lambda\,;\ \lambda\,;\ \nu z\right)$$

$$\times\,F\left(a^1, -a+b+a^1\,;\,1-\lambda\,;\ \frac{z(1-\nu)}{1-\nu z}\right)d\nu$$

प्रमेय 6.3 : $\phi \in F_{p,\mu}$ के लिए निम्नांकित तीन सूत्र सही उतरते हैं यदि $\text{Re}\,\mu > \min(\text{Re}(x+1), \text{Re}\,\beta, \text{Re}(2\beta+1), \text{Re}(\beta+x)) + 1/p$ तो

$$(\beta+x+1)\, J_m^{-\beta,\,\beta+1,\,x}\, x^{2x+1}\, J_{m-x-1}^{-x,\,x+1,\,\beta}\, x^{-2x-1}\,\phi(x-w)$$

$$= J_{m-x-1}^{-(\beta+x),\,\beta+x+2,\,\beta+x+1}\,(t-w) \qquad (6.6)$$

यदि $\text{Re}\,\mu < \min(\text{Re}(x+1), \text{Re}\,\beta, \text{Re}(\beta+x+2), \text{Re}(x+\beta)) + 1/p$ तो

$$(\beta+x+1)\, J_{-2\beta-x-1}^{-\beta,\,\beta+1,\,x}\, x^{2x+1}\, J_{-3x-2-3\beta}^{-x,\,x+1,\,\beta}\, x^{-2x-1}\,\phi(x-w)$$

$$= J_{-2\beta-2x-2}^{-(\beta+x),(\beta+x+2),(\beta+x+1)} \phi(t-w) \tag{6.7}$$

यदि $\text{Re}\,\mu < \min(0,\ \text{Re}\,x,\ \text{Re}(\beta-1), \text{Re}(\beta-2)) + 1/p$ तो

$$(\beta + x - 1)\, J_{m-x+1}^{-\beta+1,\beta,x-1}\, x^{-2\beta+1}\, J_{m}^{-x+1,x,\beta-1} \phi(x-w)$$

$$= J_{m-2\beta+1}^{-(\beta+x),2(\beta+x),(\beta+x-1)}\, x^{2\beta-1}\, \phi(t-w) \tag{6.8}$$

टिप्पणी : प्रमेय 6.2 तथा 6.3 के परिणाम प्रमेयिका 5.1 में दिये गये प्रथम तथा द्वितीय सूचकांक नियमों के सार्वीकरण हैं।

7. प्राचलों के प्रतिबन्धों का दूरीकरण

प्रमेयिका 7.1 : $\phi \in F_{p,\mu}$ के लिए निम्नांकित सम्बन्ध सत्य हैं

$$I_0^{\alpha,\alpha,0} = x^{\alpha-1} R^{\alpha} \phi \qquad \text{यदि} \quad \left(\text{Re}\,\mu > \frac{1}{p} - 1\right) \tag{7.1}$$

$$I_0^{\alpha,\alpha,\eta} = x^{\alpha-\eta-1} R^{\alpha} x^{\eta} \phi \qquad \text{यदि} \left(\text{Re}\,\mu > -\text{Re}\,\eta + \frac{1}{p} - 1\right) \tag{7.2}$$

$$I_0^{\alpha,\alpha,-\alpha} = x^{2\alpha-1} R^{\alpha} x^{-\alpha} \phi \qquad \text{यदि} \quad \left(\text{Re}\,\mu > \text{Re}(\alpha) + \frac{1}{p} - 1\right) \tag{7.3}$$

$$I^{\alpha,\beta,\eta} \phi = x^{\beta-\eta} I^{\alpha,\beta,\beta} x^{\eta-\beta} \phi \text{ यदि } \text{Re}\,\mu > \max(0,\ \text{Re}(\alpha + m) + \frac{1}{p} - 1 . \tag{7.4}$$

$$I^{\alpha,\beta,\eta} \phi = x^{-\alpha-\beta} I^{\alpha,\beta,\eta-\alpha-\beta} x^{\alpha+\beta} \phi \text{ यदि } \text{Re}\,\mu > \max(0,\ \text{Re}(\alpha + m) + \frac{1}{p} - 1 \tag{7.5}$$

उपपत्ति : उपर्युक्त सूत्रों को गॉस हाइपरज्यामितीय फलन के गुणों का उपयोग करके प्राप्त किया जा सकता है।

प्रमेयिका 7.2 : $\phi \in F_{p,\mu}$ के लिए निम्नांकित सम्बन्ध सत्य हैं।

$$J_0^{\alpha,\alpha,0}\phi = x^{-1} W^{\alpha}\phi \qquad \text{यदि} \left(\operatorname{Re}\mu < -\operatorname{Re}\alpha + \frac{1}{p}\right) \tag{7.6}$$

$$J_0^{\alpha,\alpha,\gamma}\phi = x^{\gamma} W^{\alpha} x^{\alpha-\gamma-1}\phi \qquad \text{यदि} \left(\operatorname{Re}\mu < \operatorname{Re}(\alpha+\gamma) + \frac{1}{p}\right) \tag{7.7}$$

$$J_0^{\alpha,\alpha,0}\phi = W^{\alpha} x^{\alpha-1}\phi \qquad \text{यदि} \left(\operatorname{Re}\mu < \operatorname{Re}(\alpha-1) + \frac{1}{p}\right) \tag{7.8}$$

$$J^{\alpha,\beta,\eta}\phi = x^{\eta-\beta} J^{\alpha,\beta,\beta} x^{\beta-\eta}\phi \qquad \text{यदि} \left(\operatorname{Re}\mu < \min \operatorname{Re}(\alpha-\beta), \operatorname{Re}(\beta+m)\right) + \frac{1}{p} \tag{7.9}$$

$$J^{\alpha,\beta,\eta}\phi = x^{\alpha+\beta} J^{\alpha,\beta,\eta-\alpha-\beta} x^{-\beta-\alpha}\phi \; \text{यदि} \left(\operatorname{Re}\mu < \min \operatorname{Re}(\alpha-\beta), \operatorname{Re}(\beta+m)\right) + \frac{1}{p} \tag{7.10}$$

विशिष्ट दशा : (4.5) से (4.12) तक तथा (5.9) से (5.16) तक के समीकरणों में $m = 0$ **रखने पर हमें** $I_0^{\alpha,\beta,\eta}$ तथा $J_0^{\alpha,\beta,\eta}$ के लिए क्रमशः $E^{\alpha,\eta}$ तथा $K^{\alpha,\eta}$ भिन्नात्मक कलन के एर्डेल्यी-कोबर आपरेटरों के लिए परिणाम हैं।

$$E^{\alpha+1,\alpha}\phi = E^{\alpha,\alpha}\phi + E^{\alpha,\alpha}\partial\phi \tag{8.1}$$

$$E^{\alpha+1,\alpha}\phi = E_{-1}^{\alpha,\alpha}\phi + E^{\alpha,\alpha+1}\phi + \frac{(\alpha-\beta)}{\beta} E^{\alpha,\alpha+1}\phi + E^{\alpha,\alpha}\partial\phi \tag{8.2}$$

$$E^{\alpha+1,\alpha}\phi = (1-\alpha) E^{\alpha-1,\alpha}\phi + \frac{(\alpha-\beta)}{\beta} E_{-1}^{\alpha,\alpha+1}\phi + E^{\alpha,\alpha}\partial\phi \tag{8.3}$$

$$E^{\alpha+1,\alpha}\phi = (1-\alpha) E^{\alpha-1,\alpha}\phi + E^{\alpha,\alpha+1}\phi + E^{\alpha,\alpha}\partial\phi \tag{8.4}$$

$$K^{\alpha+1,\alpha-1}\phi = \frac{t}{x} K^{\alpha,\alpha}\partial\phi \tag{8.5}$$

$$K^{\alpha+1,\alpha-1}\phi = -K_1^{\alpha+1,\alpha-2}\phi - \frac{(\alpha-\beta+1)}{\beta}K^{\alpha+1,\alpha-2}\phi + \frac{t}{x}K_1^{\alpha,\alpha}\partial\phi \tag{8.6}$$

$$K^{\alpha+1,\alpha-1}\phi = \frac{-(\beta-1)}{(\alpha+\beta)}K^{\alpha+1,\alpha-2}\phi + \frac{t(2-\alpha)(\beta-1)}{x(\alpha+\beta)}K_1^{\alpha-1,\alpha-1}\partial\phi \tag{8.7}$$

$$K^{\alpha+1,\alpha-1}\phi = \frac{(\alpha-1)(\beta-1)(2-\alpha)}{(\beta)}K^{\alpha+1,\alpha-2}\phi + \frac{t(\beta-1)(2-\alpha)}{(\beta)}K_1^{\alpha-1,\alpha-1}\partial\phi \tag{8.8}$$

$$E^{\alpha,\eta}\phi = \frac{(\alpha-\beta)(1-\alpha)E^{\alpha-1,\eta-1}\phi}{\beta-\alpha} + E^{\alpha,\eta-1}\phi \tag{8.9}$$

$$E^{\alpha,\eta}\phi = \frac{BE_1^{\alpha,\eta}\phi + E^{\alpha+1,\eta}\phi}{(\beta-\alpha)} \tag{8.10}$$

$$E^{\alpha,\eta}\phi = (1-\alpha)E^{\alpha-1,\eta}\phi + E^{\alpha,\eta+1}\phi \tag{8.11}$$

$$E^{\alpha,\eta}\phi = -\frac{1}{\alpha}\left[E^{1+\alpha,\eta}\phi - E^{\alpha+1,\eta+1}\phi\right] \tag{8.12}$$

$$K^{\alpha,\eta}\phi = K^{\alpha,\eta-1}\phi - (1-\alpha)K^{\alpha-1,\eta-1}\phi \tag{8.13}$$

$$K^{\alpha,\eta}\phi = \frac{K^{\alpha+1,\eta}\phi + \beta K^{\alpha,\eta}\phi}{(\beta-\alpha)} \tag{8.14}$$

$$K^{\alpha,\eta}\phi = (1-\alpha)K^{\alpha-1,\eta}\phi + K^{\alpha,\eta+1}\phi \tag{8.15}$$

$$K^{\alpha,\eta}\phi = \frac{-(\beta-\alpha-1)K^{\alpha+1,\eta+1}\phi + (\beta-\alpha-1)K^{\alpha+1,\eta}\phi}{(\alpha-\beta+1)(\alpha)} \tag{8.16}$$

निर्देश

1. बैयर, ए. : Integral Transformations and Fractional Calculus in Distributionenraumen, Dissertationm, Freidrich Schiller-University, Jena (1985).
2. बेंचकोव, यू. ए., ग्लास्के, एच. के. तथा मैरिचेव, ओ. आई. : Itogi. Naukii Tekhniki, Mat. Anal Vol., 21, 3-41, Viniti, Moscow 1983 (रूसी में); अंग्रेजी अनुवाद J. Soviet Math 1985, 30.
3. एर्डेल्यी, ए. इत्यादि : Higher Transendental Functions, Vol. 1-3, McGraw Hill, New York, (1953-54).
4. एक्सटन एच. : Handbook of Hypergeometric Integrals, John Wiley & Sons. New York, (1978).
5. वही. : Multiple Hyper geometric Functions and Applications Horwood, Chichester, (1976)
6. कोबर, एच. : Quart. J. Math (Oxford), 1940, 111, 193.
7. मैगस, डब्लू. इत्यादि : Formulas and Theorems for the special Functions of Mathematical Physics, Springer, Berlien (1966).
8. मकब्राइड, ए. सी. : Fractional calculus and Integral Transforms of Generalized functions (Research Note in Mathematics 131) Pitman, London (1979).
9. सैगो, एम. : Math Rep. College General Ed. Kyushu Univ. 1978, 11, 135-143.
10. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा कार्लसन, पी. डब्लू. : Multiple Gaussian Hypergeom series. John Wiley & Sons, New York, (1985).
11. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा कश्यप, बी. : Special functions in Qunt. Theory and Related Stochastic Process. Acad Press, New York, (1982).
12. सक्सेना, आर. के. : Math Zeitshr 1967, 96, 288-291.

लेखकों से निवेदन

- विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हैं और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका को होना चाहिये।
- लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।
- अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये पाँच रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।
- लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे K_4FeCN_6 अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।
- ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।
- प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिए । अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सके।
- प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।
- लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायेंगे। पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume)और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से

  फॉवेल, आर० आर० तथा म्युलर, जे०, जाइट फिजिक० केमि०, 1928, **150**, 80
- प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) एक सौ रुपये मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।
- लेख "सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2"इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबन्ध सम्पादक

मूल्य

वार्षिक मूल्य : 100 रु० या 20 पौंड या 50 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 25 रु० या 6 पौंड या 10 डालर

Rates

Annual Rs. : 100 or 20 £ or $ 50
Per. Vol. Rs.: 25 or 6 £ or $ 10

प्रकाशक :
विज्ञान परिषद् प्रयाग
महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-२

Vijnana Parishad Prayag
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad-2 (India)

मुद्रक : कम्प्यूटर कम्पोजर्स
7, बेली एवेन्यू, इलाहाबाद
फोन : 640854, 640405